Conjunto de los Números Reales

Puntaje Nacional

1. Conceptos Clave

Números Naturales

Son los números que se utilizan para contar los elementos de un conjunto. Se representan con el símbolo $\mathbb{N}$ y comienzan desde 1, extendiéndose hasta el infinito. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$

Números Enteros

Incluyen todos los números naturales ($\mathbb{N}$), sus opuestos negativos y el cero. Se representan con el símbolo $\mathbb{Z}$. $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Múltiplo

Un número es múltiplo de otro si resulta de multiplicar este otro número por algún número entero. Por ejemplo, 15 es múltiplo de 3 porque $15 = 3 \cdot 5$. Por ejemplo, los múltiplos de 7 son $\{..., -14, -7, 0, 7, 14, 21, 28, ...\}$.

Divisor

Un número es divisor de otro si al dividir el segundo número por el primero, el resultado es un número entero. Por ejemplo, 3 es divisor de 15 porque $15 : 3 = 5$. Por ejemplo, los divisores positivos de 48 son $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$.

Números Primos

Son números naturales mayores que 1 que tienen exactamente dos divisores distintos: el número 1 y sí mismos. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...\}$

Mínimo Común Múltiplo (MCM)

Es el menor número positivo que es múltiplo común de dos o más números naturales.

Máximo Común Divisor (MCD)

Es el mayor número que divide sin dejar residuo a dos o más números enteros.

Descomposición en Números Primos

La descomposición en números primos es el proceso de descomponer un número entero positivo en un producto de números primos. Por ejemplo, la descomposición en números primos de 60 es $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Números Racionales

Son todos aquellos números que pueden expresarse como el cociente (fracción) de dos números enteros, donde el denominador es diferente de cero. Se representan con el símbolo $\mathbb{Q}$. Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a es el numerador y b (diferente de cero) el denominador, utilizada para representar números racionales.

Números Irracionales

Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como el cociente exacto de dos números enteros (es decir, no son números racionales). Estos números tienen una expansión decimal infinita no periódica, lo que significa que no pueden escribirse como una fracción simple. Ejemplos famosos incluyen a $\sqrt{2}$ y π.

Números Reales

Los números reales abarcan tanto a los números racionales como a los irracionales. Cualquier número real o bien puede ser expresado como una fracción exacta de dos enteros (racional) o no puede serlo (irracional). No existe ningún número que sea simultáneamente racional e irracional. Además, en el conjunto de los números reales hay infinitos números de ambos tipos.

2. MCM y MCD entre números

Mínimo Común Múltiplo

Para encontrar el **MCM** entre dos números, primero se descomponen ambos números en sus factores primos. Por ejemplo, para los números 12 y 18, tenemos:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \text{ y } 18 = 2 \cdot 3^2$$

El MCM es el producto de los factores primos tomados al mayor exponente que aparecen en ambas descomposiciones. Por lo tanto, el MCM de 12 y 18 es $2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Máximo Común Divisor

Para encontrar el **MCD** entre dos números, también se descomponen ambos números en sus factores primos. Considerando los números 36 y 48:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \text{ y } 48 = 2^4 \cdot 3$$

El MCD es el producto de los factores primos comunes a ambos números, tomados al menor exponente. Así, el MCD de 36 y 48 es $2^2 \cdot 3^1 = 12$.

3. Suma o resta de fracciones

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$$

Multiplicación cruzada

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{(3 \cdot 6) - (5 \cdot 4)}{4 \cdot 6} = \frac{18 - 20}{24} = \frac{-2}{24} = -\frac{1}{12}$$

Amplificación por denominador "vecino"

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} - \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{18}{24} - \frac{20}{24} = \frac{18 - 20}{24} = \frac{-2}{24} = -\frac{1}{12}$$

Amplificación para obtener MCM entre denominadores

El MCM entre 4 y 6 es 12

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} = \frac{9 - 10}{12} = -\frac{1}{12}$$

4. Multiplicación de fracciones

$$\frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

Se multiplican los numeradores y por otro lado, los denominadores.

$$-\frac{6 \cdot 2}{7 \cdot 3} = -\frac{12}{21} = -\frac{4}{7}$$

5. División de fracciones

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$$

Invertir segunda fracción

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Formar "torre"de fracciones, multiplicar extremos y números centrales

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

6. Comparación de fracciones

$$\frac{5}{12} \text{ y } \frac{2}{5}$$

Multiplicar por MCM de denominadores

El MCM de 12 y 5 es 60

$$\frac{5}{12} \cdot 60 = 25 \text{ y } \frac{2}{5} \cdot 60 = 24$$

El lado izquierdo es mayor que el derecho, por lo que $\frac{5}{12} > \frac{2}{5}$.

Igualar denominadores

$$\frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60} \text{ y } \frac{2 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{24}{60}$$

Como la fracción izquierda tiene mayor numerador, entonces $\frac{5}{12} > \frac{2}{5}$.

7. Decimal a fracción

Decimal finito

Para convertir un decimal finito a fracción, se escribe todo el número sin la coma decimal como numerador. En el denominador, se coloca el número 1 seguido de tantos ceros como cifras haya después de la coma. Luego, se simplifica la fracción si es posible.

$$1,65 = \frac{165}{100} = \frac{33}{20}$$

Decimal periódico

Para convertir un decimal periódico a fracción, se toma todo el número sin la coma decimal y se le resta la parte no periódica, este resultado se coloca en el numerador. En el denominador, se coloca un número formado por tantos nueves como cifras tenga el período. Finalmente, se simplifica la fracción resultante.

$$23,\overline{175} = \frac{23175 - 23}{999} = \frac{23152}{999}$$

Decimal semiperiódico

Para convertir un decimal semiperiódico a fracción, se toma todo el número sin la coma decimal y se le resta la parte no periódica (con decimales y sin coma), este resultado se coloca en el numerador. En el denominador, se coloca un número formado por tantos nueves como cifras tenga el período, seguido de tantos ceros como cifras entre la coma y el periódo. Finalmente, se simplifica la fracción resultante.

$$1,12\overline{345} = \frac{112345 - 112}{99900} = \frac{112233}{99900}$$

8. Operación de Números Reales

Entre Racionales

- Racional + Racional = Racional
- Racional − Racional = Racional
- Racional · Racional = Racional
- Racional : $\underbrace{\text{Racional}}_{\neq 0}$ = Racional

Entre Irracionales

- Irracional + Irracional = Racional/Irracional
- Irracional − Irracional = Racional/Irracional
- Irracional · Irracional = Racional/Irracional
- Irracional : Irracional = Racional/Irracional

Entre Racionales e Irracionales

- Racional + Irracional = Irracional
- Racional − Irracional = Irracional
- $\underbrace{\text{Racional}}_{\neq 0}$ · Irracional = Irracional
- $\underbrace{\text{Racional}}_{\neq 0}$: Irracional = Irracional