About the irrationality of e=2.718...

J. Liouville

1840

We prove that e, basis of the neperien logarithm, is not a rational number. The same method can also be used to prove that e cannot be a root of a second degree equation with rational coefficients, i.e. we cannot find $ae + \frac{b}{e} = c$, such that a is a positive integer and b, c are positive or negative integers. As a matter of fact, if we replace e and $1/e$ or e^{-1} with their power series deduced from e^x, and given that we multiply both sides of the equation by $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$, we find that

$$\frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2} + ...\right) \pm \frac{b}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2} + ...\right) = \mu$$

where μ is an integer. We can make it so that

$$\pm\frac{b}{n+1}$$

is positive; we just need to suppose that n is even when $b < 0$ and that n is odd when $b > 0$; for big values of n the equation above leads to a contradiction; the first term of the equation is positive and very small, with values between 0 and 1, and as such can never be equal to an integer μ. So, etc.

SUR L'IRRATIONNALITÉ DU NOMBRE $e = 2{,}718\ldots$;

PAR J. LIOUVILLE.

On prouve dans les éléments que le nombre e, base des logarithmes népériens, n'a pas une valeur rationnelle. On devrait, ce me semble, ajouter que la même méthode prouve aussi que e ne peut pas être racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, en sorte que l'on ne peut pas avoir $ae + \frac{b}{e} = c$, a étant un entier positif et b, c, des entiers positifs ou négatifs. En effet, si l'on remplace dans cette équation e et $\frac{1}{e}$ ou e^{-1} par leurs développements déduits de celui de e^x, puis qu'on multiplie les deux membres par $1.2.3\ldots n$, on trouvera aisément

$$\frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \ldots\right) \pm \frac{b}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2} + \ldots\right) = \mu,$$

μ étant un entier. On peut toujours faire en sorte que le facteur

$$\pm \frac{b}{n+1}$$

soit positif; il suffira de supposer n pair si b est <0 et n impair si b est >0; en prenant de plus n très grand, l'équation que nous venons d'écrire conduira dès lors à une absurdité; car son premier membre étant essentiellement positif et très petit, sera compris entre 0 et 1, et ne pourra pas être égal à un entier μ. Donc, etc.