Principio
de
Lectura Única

f. garcía

23 de diciembre de 2018

Resumen

Contiene un estudio exhaustivo del Principio de Lectura Única para lenguajes. Es una revisión crítica del apéndice "Caracterisation des termes et des relations" (E.I.42–E.I.46) del libro de N. Bourbaki [1] con aportaciones originales de importancia y correcciones; de hecho el apéndice ha quedado revisado, corregido, completado y rehecho profundamente.

Índice

1. Lenguaje 1
2. Palabras Significativas 4
3. Caracterización de las Palabras Significativas 4
4. Caracterización del Conjunto de Expresiones Bien Formadas 9
5. Ejemplos 10

1. Lenguaje

Definición 1.1. Un *lenguaje* es un par $\langle S, g\rangle$, donde S es un conjunto no vacío de *símbolos* y g es una aplicación de S que toma valores naturales (i.e. $g\colon S \longrightarrow \omega$). Para

todo $n \in \omega$, sea $S(n) = g^*(n)$. Un símbolo perteneciente a S es de ariedad n sii, por def., pertenece a $S(n)$.

Definición 1.2. Sea $\mathbf{S} = \langle S, g \rangle$ un lenguaje. Definimos el conjunto de *expresiones* de $\mathbf{S}$, en símbolos $\mathrm{E}(S)$, por la igualdad

$$\mathrm{E}(S) = \bigcup_{n \in \omega} S^n$$

Observación 1.1. El conocimiento profundo de $\mathrm{E}(S)$ conlleva comprender que para todo número natural[1] n, S^n es realmente el conjunto de aplicaciones de n en S. El único elemento[2] de S^0, a saber $\varnothing$, será denominado *expresión vacía* y representado eventualmente por $\langle x_i \rangle_{i \in 0}$.

Definición 1.3. Sea $\mathbf{S} = \langle S, g \rangle$ un lenguaje, m, n números naturales y $\langle x_i \rangle_{i \in m}, \langle y_i \rangle_{i \in n} \in \mathrm{E}(S)$. Por definición, $\langle x_i \rangle_{i \in m} \cdot \langle y_i \rangle_{i \in n}$ es la expresión $\langle z_i \rangle_{i \in m+n}$ que cumple para todo $i \in m + n$ lo siguiente:

$$z_i = \begin{cases} x_i, & \text{si } i < m \\ y_{i-m}, & \text{si } m \leq i < m + n \end{cases}$$

Si $A = \langle x_i \rangle_{i \in m}$ y $B = \langle y_i \rangle_{i \in n}$, llamamos a $A \cdot B$ la *yuxtaposición* de A con B y ocasionalmente la representaremos simplemente por AB.

Definición 1.4. Sea $\mathbf{S} = \langle S, g \rangle$ un lenguaje y $A, B \in \mathrm{E}(S)$. Supongamos que: m y n son números naturales, $A = \langle x_i \rangle_{i \in m}$ y $B = \langle y_i \rangle_{i \in n}$. B es un *segmento* de A sii, por def., $n \leq m$ y existe $k \in m$ tal que para todo $i \in n$, $y_i = x_{k+i}$. B se denomina un segmento *propio* de A sii, por def., es segmento de A y $n < m$. Si B es segmento de A y

- $k = 0$, entonces B es un *segmento incial* de A.
- $m - k = n$, entonces B es un *segmento final* de A.

Observación 1.2. Cualquier expresión es un segmento suyo, inicial y final. $\varnothing$ es segmento de cualquier expresión.

Definición 1.5. Un *monoide* es un álgebra $\mathbf{M} = \langle M, *, e \rangle$ de tipo $\langle 2, 0 \rangle$ que cumple las siguientes propiedades:

1. para todo $x, y, z \in M$, $x * (y * z) = (x * y) * z$
2. para todo $x \in M$, $e * x = x = x * e$.

Observación 1.3. Es evidente que el elemento neutro de un monoide es único.

[1] El número natural 0 es $\varnothing$ y el número natural $n^+ = n \cup \{n\}$, en palabras sencillas: $n+1 = \{0, \ldots, n\}$.

[2] Para todo conjunto Y, $Y^{\varnothing}$ tiene exactamente un elemento, a saber $\varnothing$, sea Y vacío o no. Si X no es vacío, entonces $\varnothing^X$ es vacío.

Teorema 1.1. *Sea $\langle S, g\rangle$ un lenguaje. Entonces $\langle \mathrm{E}(S), \cdot, \varnothing\rangle$ es el monoide libre sobre $\langle S, g\rangle$ para la inclusión (natural) de S en $\mathrm{E}(S)$.*

Definición 1.6. Sea $\langle S, g\rangle$ un lenguaje y sea l la aplicación con dominio S y constantemente igual al número natural 1. Denominemos también por l a su única extensión homomórfica a $\mathrm{E}(S)$. Naturalmente l es conocida como función *longitud*.

Observación 1.4. Para todo $A \in \mathrm{E}(S)$:

$$l(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ es vacía.} \\ 1 + l(\langle x_i\rangle_{i\in n-1}), & \text{si } A = \langle x_i\rangle_{i\in n} \text{ y } n \in \omega^* \end{cases}$$

En general, para todo $A, B \in \mathrm{E}(S)$, $l(AB) = l(A) + l(B)$.

Observación 1.5. La longitud de $\varnothing$ es 0 y es la única palabra con longitud igual a 0. De forma deliberada, con el fin de aligerar el discurso, las palabras de longitud 1 podrán ser identificadas con los signos, si conviene.

Observación 1.6. En palabras sencillas, sea $A \in \mathrm{E}(S)$. Si $A = A'BA''$, entonces B es un *segmento* de A y es un segmento *propio* sii, por definición, $A \neq B$. B es un segmento *inicial* (resp. *final*) de A sii, por definición, $A' = \varnothing$ (resp. $A'' = \varnothing$). Si $l(A') = k$, decimos que B comienza en la posición $(k+1)$-ésima. Si $A = BCDEF$ (donde las palabras B, C, D, E, y F pueden ser vacías), se dice que los segmentos C y E son *disjuntos* en A.

Observación 1.7. Si $A \in \mathrm{E}(S)$, realmente $l(A) = \operatorname{dom} A$ y si $j \leq l(A)$ entonces $A \restriction j$ representará al segmento inicial de A de longitud j.

Definición 1.7. Sea $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ un lenguaje. Notaremos con el mismo símbolo g también a su única extensión homomórfica a $\mathrm{E}(S)$. La función g es llamada *función peso*.

Lema 1.2. *Sea $\langle S, g\rangle$ un lenguaje. Entonces:*

1. *Para todo $A, B \in \mathrm{E}(S)$, $g(AB) = g(A) + g(B)$.*
2. *Para todo $A \in \mathrm{E}(S)$:*

$$g(A) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } A = \varnothing \\ \sum_{i=0}^{k} g(s_i) & , \text{ si } A = \langle s_i\rangle_{0\leq i\leq k} \end{cases}$$

Lema 1.3. *Sea $\langle S, g\rangle$ un lenguaje. Si A es una expresión y $g(A) = 0$ entonces $A = \varnothing$ o existe un número natural k tal que $0 \leq k$, $A = \langle s_i\rangle_{0\leq i\leq k}$ y para todo $0 \leq i \leq k$, $g(A_i) = 0$.*

Definición 1.8. Para todo lenguaje $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$, consideremos la función b de S en los enteros[3] definido por $b(s) = g(s) - 1$ y nombremos también por b a su única extesión homomórfica a $\mathrm{E}(\mathbf{S})$ que, así pues, quedará definida como sigue:

$$b(A) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } A \equiv \varnothing \\ \sum_{j=0}^{k-1} b(s_i) & , \text{ si } A \equiv \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle \end{cases}$$

[3] $\mathbb{Z}$ tiene estructura de monoide aditivo.

Lema 1.4. *Sea* $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ *un lenguaje. Para toda* $A \in \mathrm{E}(\mathbf{S})$, $b(A) = g(A) - l(A)$

2. Palabras Significativas

Definición 2.1. Sea $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ un lenguaje. Una sucesión $\langle A_j\rangle_{0\leq j\leq n}$ de elementos de $\mathrm{E}(S)$ es *significativa* respecto a $\mathbf{S}$ o según g sii, por definición, para cada $0 \leq i \leq n$ existen $p, i_1, \ldots, i_p \in \omega$ tales que $i_1, \ldots, i_p < i$ y $f \in S$ tales que $g(f) = p$ y $A_i = fA_{i_1}\cdots A_{i_p}$. Una palabra es *significativa* respecto a $\mathbf{S}$ o según g sii, por def., existe al menos una sucesión significativa respecto a g de la que forma parte. La expresión *expresión bien formada* o simplemente *ebf* del lenguaje $\mathbf{S}$ es sinónimo de palabra significativa del $\mathbf{S}$.

Observación 2.1. De la Definición 2.1 se deduce que:

1. La condición definitoria de sucesión significativa para $i = 0$ es que $A_0 \in S$ y $\mathrm{g}(A_0) = 0$.
2. Es condición necesaria para ser palabra significativa el no ser la palabra vacía.

Lema 2.1. *Sea* $\langle S, g\rangle$ *un lenguaje. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Existe al menos una palabra significativa según* g *en* $\mathrm{E}(S)$
2. $g^*(\{0\}) \neq \varnothing$

Demostración. Sea A una palabra significativa según g en $\mathrm{E}(S)$. Para ella existirá al menos una sucesión significativa de $\langle A_j\rangle_{0\leq j\leq n}$ de elementos de $\mathrm{E}(S)$ de la que forma parte. Se cumple entonces que $A_0 \in S$ y $g(A_0) = 0$, por lo que $g^*(\{0\}) \neq \varnothing$. Recíprocamente, si $g^*(\{0\}) \neq \varnothing$, sea $s \in S$ tal que $g(s) = 0$. Se tiene que $\langle\langle s\rangle\rangle$ es una sucesión significativa de elementos de $\mathrm{E}(S)$ que hace a $\langle s\rangle$ palabra significativa. □

Lema 2.2. *Sea* $\langle S, g\rangle$ *un lenguaje. Si* $A_1, \ldots, A_p$ *son palabras significativas de* $\mathrm{E}(S)$ *respecto a* g *y* $f \in S$ *tal que* $g(f) = p$, *entonces* $fA_1\cdots A_p$ *es significativa.*

3. Caracterización de las Palabras Significativas

Definición 3.1. Sea $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ un lenguaje. Una palabra A de $\mathrm{E}(S)$ es *equilibrada* según $\mathbf{S}$ o respecto a g sii, por definición, cumple las siguientes propiedades:

1. $l(A) = g(A) + 1$ y

2. para todo segmento inicial propio y no vacío C de A se cumple $l(C) \leq g(C)$.

Observación 3.1. En la Definición 3.1, la condición 2) es equivalente a "para todo segmento inicial propio C de A se cumple $l(C) \leq g(C)$" pues $l(\varnothing) = 0 = g(\varnothing)$.

Observación 3.2. En virtud de la condición 1) en la Definición 3.1 es evidente que si A es equilibrada entonces $A \neq \varnothing$.

Lema 3.1. *Sea $\langle S, g\rangle$ un lenguaje. Para todo $A \in \mathrm{E}(S)$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *A es equilibrada.*
2. *$b(A) = -1$ y para todo natural k tal que $k < \mathrm{len}(A)$, $0 \leq b(A \restriction k)$.*[4]

Teorema 3.2. *Sea $\langle S, g\rangle$ un lenguaje y $A \in \mathrm{E}(S)$. Si A es significativa respecto a g entonces A es equilibrada respecto a g.*

Demostración. Sea A una palabra significativa respecto a g que lo es por figurar en una sucesión significativa, digamos, $\langle A_j\rangle_{0\leq j\leq n}$. Demostremos que para todo $0 \leq k \leq n$ se tiene que la palabra A_k es equilibrada. Sea pues $0 \leq k \leq n$ y supongamos que es A_i es equilibrada para todo $0 \leq i < k$. Hay dos posibles casos: $g(A_k) = 0$ o bien $g(A_k) \neq 0$. Supongamos lo primero, es decir, que $g(A_k) = 0$; salvada la posibilidad $A_k = \varnothing$ (cfr. 2) de la Observación 2.1), por el Lema 1.3 y ser A_k significativa, debe existir $s \in S$ tal que $g(s) = 0$ y $A_k = \langle s\rangle$. En tal caso, A_k cumple lo requerido por la Definición 3.1 para ser equilibrada ya que no tiene segmento alguno inicial propio que sea no vacío, además de que $g(A_k) = 0$ y $l(A_k) = 1 = 0 + 1 = g(A_k) + 1$. En particular tenemos que A_0 es equilibrada. Supongamos ahora que $g(A_k) \neq 0$. En tal caso se tendrá $A_k = fB_1 \cdots B_p$ donde $f \in S$ cumple $g(f) = p$ y para todo todo $1 \leq j \leq p$ existe $i_j < k$ tal que $B_j = A_{i_j}$ siendo A_{i_j} equilibrada (según la hipótesis de inducción). Se tiene:

$$\begin{aligned} l(A_k) &= 1 + \sum_{j=1}^{p} l(B_j) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{p} (g(B_j) + 1) \\ &= 1 + p + \sum_{j=1}^{p} g(B_j) \\ &= 1 + g(A_k) \end{aligned}$$

Por otra parte, sea C un segmento inicial no vacío y propio de A_k. Si no existe $m < p$ tal que B_m es un segmento de C, entonces $C = fD$ donde D es un segmento inicial de

[4] Es decir, para todo segmento inicial D de A, $0 \leq b(D)$.

B_1. Si $D = \varnothing$, entonces $C = f$ y $l(C) = 1 \leq p = g(C)$. Si $D \neq \varnothing$ entonces D es un segmento inicial propio y no vacío de la palabra significativa B_1:

$$\begin{aligned} l(C) &= 1 + l(D) \\ &\leq p + g(D) \\ &= g(f) + g(D) \\ &= g(fD) \\ &= g(C) \end{aligned}$$

Si por contra existe algún $m < p$ tal que B_m es un segmento de C, sea q el mayor de los enteros m tales que $m < p$ y B_m es un segmento de C; se tiene entonces que $C = fB_1 \cdots B_q D$, donde D es un segmento inicial propio de B_{q+1}. Entonces:

$$\begin{aligned} l(C) &= 1 + (\sum_{j=1}^{q} l(B_j)) + l(D) \\ &\leq 1 + (\sum_{j=1}^{q} g(B_j) + 1) + g(D) \\ &\leq p + (\sum_{j=1}^{q} g(B_j)) + g(D) \\ &= g(C) \end{aligned}$$

□

El enunciado recíproco del Teorema 3.2 es cierto. Para su demostración son necesarios algunos resultados previos.

Lema 3.3. *Sea $\langle S, g\rangle$ un lenguaje y $A \in \mathrm{E}(S)$ equilibrada según g. Para todo número natural k tal que $0 \leq k < l(A)$, existe un único segmento T de A equilibrado según g que comienza en la posición k de A.*

Demostración. Si A es una palabra equilibrada de $\mathrm{E}(S)$, entonces $0 < l(A)$ (cfr. Observación 3.2), por lo que el enunciado de este lema tiene sentido. Demostremos en primer lugar la **existencia** de T. Sea $A = BC$, donde $l(B) = k$ y $l(C) = q$; así pues $q = l(A) - k$ y por tanto $0 < q$. Para todo $0 \leq i \leq q$, sea C_i el segmento inicial de longitud i de C.[5] Sea

$$X = \{j \in \omega \colon 0 < j \leq q \text{ y para todo } 0 \leq h < j,\ l(C_h) \leq g(C_h)\}$$

[5] Como B es un segmento inicial propio de A (recuérdese que $k < l(A)$), se tiene:

$$l(C_q) = l(A) - l(B) \geq g(A) + 1 - g(B) = g(C_q) + 1$$

Se tiene que $X \neq \varnothing$, pues $0 = l(C_0) \leq g(C_0) = 0$, es decir, $1 \in X$; además X es finito (sus elementos no superan el valor q). Si $i = \max X$, se cumple que $l(C_{i-1}) \leq g(C_{i-1})$ y $l(C_i) \geq g(C_i) + 1$. Demostremos que C_i es equilibrada. La condición 2) de la Definición 3.1 se cumple por razón de la definición de i. Por otra parte, se tiene:

$$\begin{aligned} g(C_i) + 1 &\leq l(C_i) \\ &= l(C_{i-1}) + 1 \\ &\leq g(C_{i-1}) + 1 \\ &\leq g(C_i) + 1 \end{aligned}$$

de lo que se deduce $l(C_i) = g(C_i) + 1$. La existencia queda probada tomando $T = C_i$. Para demostrar la **unidad** basta observar que si T es una palabra equilibrada, ningún segmento inicial propio de T es equilibrado (cfr. Definición 3.1) □

Lema 3.4. *Sea $\langle S, g\rangle$ un lenguaje. Toda $A \in \mathrm{E}(S)$ equilibrada según g puede ser expresada de forma única de una de las siguientes formas:*

1. *x, siendo $x \in S(0)$, siempre que $l(A) = 1$.*
2. *$fA_1 \cdots A_p$, donde para todo $1 \leq i \leq p$ se cumple que A_i es una palabra equilibrada según g y donde $g(f) = p$, siempre que $1 < l(A)$.*

Demostración. Si A es equilibrada, es no vacía y $0 < l(A)$. Si $l(A) = 1$, entonces existe un único $x \in S$ tal que $A = \langle x\rangle$ (o simplemente $A = x$ según nuestro convenio notacional) y $g(x) = 0$. Si $1 < l(A)$, sea f el signo inicial de A. Por el Lema 3.3, A puede ser expresada en la forma $fA_1 \cdots A_p$ donde para todo $1 \leq i \leq p$, A_i es equilibrada; para ello basta definir A_i como el único segmento equilibrado según g que comienza en la posición $k(i)$, donde:

$$k(i) = \begin{cases} 1 & \text{, si } i = 1 \\ 1 + \sum_{j<i} l(A_j) & \text{, si } i > 1 \end{cases}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{p} l(A_i) &= l(A) \\ &= g(A) + 1 \\ &= g(f) + (\sum_{i=1}^{p} g(A_i)) + 1 \\ &= g(f) + (\sum_{i=1}^{p} (l(A_i) - 1)) + 1 \end{aligned}$$

de donde se deduce que $g(f) = p$. Para la unidad, supongamos que A se pudiese ser escrita como $gB_1 \cdots B_q$, donde para todo $1 \leq i \leq q$ se cumple que B_i es una palabra

equilibrada según g. Como $gB_1 \cdots B_q = A = fA_1 \cdots A_p$ y A es una upla, se deduce que $f = g$ y por tanto $q = p$. Además, tanto A_1 como B_1 son equilibradas y comienzan en la posición 1; por el Lema 3.3 sabemos que $A_1 = B_1$. Si $p = 1$, el razonamiento está completo; pero si $1 < p$, supongamos en un razonamiento inductivo que $1 < i \leq p$ y que el resultado es cierto para todo j tal que $1 \leq j < i$, es decir, que para todo $1 \leq j < i$, $A_j = B_j$. Entonces tanto A_i como B_i son segmentos que comienzan en la misma posición y son ambos equilibrados. De nuevo por el Lema 3.3 concluimos que $A_i = B_i$ y de ahí la unidad. □

Observación 3.3. Establecidos el Lema 3.3 y Lema 3.4 se deduce fácilmente (por recurrencia sobre la longitud de A) que toda palabra equilibrada A es significativa.

Teorema 3.5. *Sea $\langle S, g\rangle$ un lenguaje y $A \in \mathrm{E}(S)$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *A es significativa respecto a g.*
2. *A es equilibrada respecto a g*

Demostración. El Teorema 3.2 permite conocer que la afirmación 2 es consecuencia de la afirmación 1. Supongamos ahora que A es una palabra de $\mathrm{E}(S)$ equilibrada respecto a g. El razonamiento es por inducción sobre $l(A)$. Si $l(A) = 1$, sabemos por el Lema 3.4 que existe $x \in S$ y tal que $A = x$ y $g(x) = 0$; entonces $\langle A\rangle$ es una sucesión significativa y así A es una palabra significativa. Supongamos que $1 < l(A)$ y que el resultado es cierto para toda palabra equilibrada de longitud inferior a la de A. De nuevo, por el Lema 3.4 sabemos que existe $f \in S$ tal que $g(f) = p$ y palabras equilibradas A_i para todo $1 \leq i \leq p$ tales que $fA_1 \cdots A_p$. Por la hipótesis de inducción, para todo $1 \leq i \leq p$ resulta que A_i es significativa. Por el Lema 2.2 sabemos que $fA_1 \cdots A_p$ es significativa, es decir, que A es significativa. □

En términos de b el Teorema 3.5 puede ser reescrito según reza en el Corolario 3.6

Corolario 3.6. *Sea $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ un lenguaje y A un elemento de $\mathrm{E}(S)$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *A es significativa.*
2. *$b(A) = -1$ y para todo natural k tal que $k < \mathrm{len}(A)$, $0 \leq b(A \restriction k)$.*

Por el Teorema 3.5 podemos reescribir el Lema 3.4 según reza en el enunciado del Corolario 3.7.

Corolario 3.7 (Principio de Lectura Única). *Sea $\langle S, g\rangle$ un lenguaje. Toda $A \in \mathrm{E}(S)$ significativa según g puede ser expresada de forma única en la forma:*

$$f A_1 \cdots A_p$$

donde: $f \in S$, $g(f) = p$ y para todo $1 \leq i \leq p$, A_i es una palabra significativa según g.

Observación 3.4. Observe en el enunciado del Corolario 3.7 que $l(A) = 1$ —equivalentemente, $A \in S$ según nuestro convenio (cfr. Observación 1.5)— si, y sólo si, $g(f) = 0$.

4. Caracterización del Conjunto de Expresiones Bien Formadas

Definición 4.1. Dado un lenguaje $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ definimos:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= S(0) \\ \Phi_{i+1} &= \Phi_i \cup \{f A_0 \cdots A_{n-1} \colon f \in S \setminus S(0),\, g(f) = n \text{ y } A_0, \ldots, A_{n-1} \in \Phi_i\} \end{aligned}$$

y finalmente:

$$\mathrm{P}(\mathbf{S}) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Phi_i$$

Teorema 4.1. *Sea $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ un lenguaje y A una palabra de $\mathrm{E}(S)$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *A es una ebf de $\mathbf{S}$.*
2. *$A \in \mathrm{P}(\mathbf{S})$.*

Demostración. Supongamos que A es como dice el enunciado del teorema y que es significativa. El razonamiento es por inducción sobre $\mathrm{l}(A)$. Si $\mathrm{l}(A) = 1$, por el Corolario 3.7 sabemos que $A \in \mathrm{E}(\mathbf{S})$ y que $g(A) = 0$, por tanto $A \in \Phi_0$. Supongamos que $1 < \mathrm{l}(A)$ y que el resultado es cierto para cualquier palabra significativa de longitud menor que la de A. Por el Corolario 3.7 sabemos que A se puede expresar como $f A_0 \cdots A_{n-1}$, donde para todo $1 \leq i \leq p$ se cumple que A_i es una palabra significativa según g y donde $g(f) = n$. Por la hipótesis de inducción, para todo $0 \leq i \leq n-1$ existe k_i tal que $A_i \in \Phi_{k_i}$. Sea $k = \max\{k_0, \ldots, k_{n-1}\}$; se cumple entonces que para todo $0 \leq i \leq n-1$, $A_i \in \Phi_k$ y por tanto, $A \in \Phi_{k+1}$. En definitiva, hemos conluido que sea cual sea la longitud de A, $A \in P(\mathbf{S})$. La implicación recíproca es cierta por la propia Definición 2.1 o por el Lema 2.2. □

Definición 4.2. Sea $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ un lenguaje, $f \in S$ tal que $g(f) = n$ y $\Gamma \subseteq \mathrm{E}(\mathbf{S})$. Γ es *cerrado* para f sii, por definición, para todo $A_0, \ldots, A_{n-1} \in \Gamma$, $fA_0 \cdots A_{n-1} \in \Gamma$. Γ es cerrado para S sii, por definición, Γ es cerrado para cada $f \in S$.

Observación 4.1. Obsérvese que si $f \in S(0)$, que Γ sea cerrado para cada f es equivalente a que $f \in \Gamma$.

Teorema 4.2. *Sea* $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ *un lenguaje. Entonces:*

$$\mathrm{P}(\mathbf{S}) = \bigcap\{\Gamma \subseteq \mathrm{E}(\mathbf{S})\colon \Gamma \textit{ es cerrado para } S\}$$

Demostración. Existe al menos un subconjunto de $\mathrm{E}(\mathbf{S})$ cerrado para S, a saber, $\mathrm{P}(\mathbf{S})$. Por tanto $\bigcap\{\Gamma \subseteq \mathrm{E}(\mathbf{S})\colon \Gamma \text{ es cerrado para } S\}$ existe y es un subconjunto de $\mathrm{P}(\mathbf{S})$. Recíprocamente, si $\Gamma \subseteq \mathrm{E}(\mathbf{S})$, Γ es cerrado para S entonces evidentemente contiene como subconjunto a $\mathrm{P}(\mathbf{S})$. Así pues, $\mathrm{P}(\mathbf{S})$ es subconjunto de $\bigcap\{\Gamma \subseteq \mathrm{E}(\mathbf{S})\colon \Gamma \text{ es cerrado para } S\}$. □

Definición 4.3. Dado un lenguaje $\mathbf{S} = \langle S, g\rangle$ y A una fbf de $\mathbf{S}$, el conjunto de *subfórmulas* de A, en símbolos $\mathrm{sub}(A)$, es por definición:

$$\mathrm{sub}(A) = \begin{cases} \{A\}, & \text{si } A \in S, \\ \{A\} \cup (\bigcup_{i=0}^{r-1} \mathrm{sub}(A_i)), & \text{si } g(f) = r \text{ y } A = fA_0 \cdots A_{r-1} \end{cases}$$

Sea $f \in S$; si $g(f) = r$ entonces $f \in A$ significa que $f = A$ o existen $A_0, \ldots, A_{r-1} \in \mathrm{sub}(A)$ tales que $fA_0 \cdots A_{r-1} \in \mathrm{sub}(A)$.

5. Ejemplos

Definición 5.1 (lógica clásica)**.** Un *lenguaje para la lógica clásica* es un lenguaje $\langle L, g\rangle$ donde:

- $S_l = \{N, C\}$,
- $S_c \subseteq \{\Pi\}$,
- $S_e \subseteq \{\approx\}$,
- V es un conjunto,
- existen conjuntos F y P tales que $L = F \cup P \cup S_l \cup S_c \cup S_e \cup V$,
- los conjuntos F, P, S_l, S_c, S_e y V son disjuntos dos a dos,
- $V \subseteq L(0)$, $\{N\} \subseteq L(1)$ y $\{C, \Pi, \approx\} \subseteq L(2)$.

Para todo número natural n, representamos por $F(n)$ (resp. $P(n)$) al conjunto $g^*(n) \cap F$ (resp. $g^*(n) \cap P$), de forma que $\{F(n)\colon n \in \omega \text{ y } F(n) \neq \varnothing\}$ (resp. $\{P(n)\colon n \in \omega \text{ y } P(n) \neq \varnothing\}$) es una partición de F (resp. P) de ser éste no vacío. Los elementos de $F(n)$ (resp. $P(n)$) se denominan *símbolos de función n-arios* (resp. *símbolos de*

relación n-arios o *símbolos de predicado n-arios*). Los símbolos de $F(0)$ (resp. $R(0)$) se denominan *símbolos de constante* (resp. *letras proposicionales* o *símbolos de variable proposicional*). Los elementos de $S_l \cup S_c \cup S_e$ reciben el nombre de *símbolos lógicos* y los elementos de V recibirán el nombre de *símbolos de variable*.

Observación 5.1. En la mayoría de los ejemplos elementales de lógica, L es finito por lo que para casi todo número natural n, los conjuntos $F(n)$ y $P(n)$ son vacíos.

Definición 5.2. Sea $\mathbf{L} = \langle L, g\rangle$ un lenguaje para la lógica clásica como sugiere la Definición 5.1. Definimos el lenguaje $\mathbf{T} = \langle T, h\rangle$ donde $T = F \cup V$ y h es la extensión de $g \restriction F$ que cumple $h(x) = 0$, para todo $x \in V$. Entonces:

1. El conjunto de *términos* de $\mathbf{L}$, en símbolos $\mathrm{Term}(\mathbf{L})$, es $\mathrm{P}(\mathbf{T})$.
2. Una expresión de $\mathbf{L}$ es una *fórmula atómica* sii, por definición, es de la forma $p\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$ donde: $n \geq 0$, $\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}$ son términos de $\mathbf{L}$ y $p \in P(n)$ o p es eventualmente el símbolo $\approx$, de estar presente en el lenguaje. El conjunto de las fórmulas atómica será representado por $\mathrm{Atom}(\mathbf{L})$
3. Una expresión de $\mathbf{L}$ es una *fórmula* de $\mathbf{L}$ sii, por definición, está construida según las siguientes reglas:
   a) Cualquier fórmula atómica es una fórmula.
   b) $N\varphi$ es fórmula, siempre que φ sea fórmula.
   c) $C\varphi\psi$ es fórmula, siempre que φ y ψ sean fórmulas.
   d) $\Pi x\varphi$ es fórmula, siempre que φ sea fórmula y Π sea un símbolo del lenguaje.
   El conjunto de las fórmulas de $\mathbf{L}$ será representado por $\mathrm{Form}(\mathbf{L})$.

Observación 5.2. Sea tenido en cuenta que:

1. En la mayoría de las aplicaciones V es vacío o, si no lo es, es imprescindible que sea no finito, bastando para los resultados clásicos esenciales con que sea numerable.
2. A pesar de su implicación en la formación de fórmulas atómicas, $\approx$ no ha sido considerado un símbolo de relación sino un símbolo lógico.
3. La totalidad de las fórmulas y términos del lenguaje $\mathbf{L}$ para la lógica clásica son fórmulas bien formadas del lenguaje sobre el conjunto $F \cup P \cup V \cup \{N, C, \Pi, \approx\}$, donde para todo $x \in V$, $g(x) = 0$, $g(N) = 1$ y $g(C) = 2 = g(\Pi) = g(\approx)$. Sin embargo, muchas expresiones bien formadas ni son fórmulas ni términos, verbigracia Πxy. Esto significa que el *principio de lectura única* (cfr. Corolario 3.7) **nos dice más** de lo que necesitamos, no menos.
4. La importancia del *principio de lectura única* es capital. Por ejemplo, supongamos que φ es la fórmula $C\alpha\beta$, donde α y β son fórmulas. Cuando asignemos un valor de verdad a φ será importante tener la certeza de que la misma φ no puede ser escrita de una forma diferente como $C\alpha'\beta'$ siendo fórmula ambas, α' y β'. El Corolario 3.7 expresa la imposibilidad de ese hecho, por mucho que permitamos que α' y β' varíen entre las fórmulas.

Definición 5.3 (lenguaje proposicional)**.** El *lenguaje proposicional* es el lenguaje para la lógica clásica que cumple:

1. $F = \varnothing$,
2. $P(0)$ un conjunto no finito numerable, cuyos elementos serán denominados *símbolos de variable proposicional*,
3. para todo número natural n no nulo, $P(n) = \varnothing$ y
4. $V = \varnothing = S_c = S_e$

Definición 5.4 (fórmula proposicional)**.** Sea $\mathbf{L} = \langle L, g\rangle$ un lenguaje para la lógica clásica como sugiere la Definición 5.3. Llamamos *fórmula proposicional* de $\mathbf{L}$ a las expresiones bien formadas de $\mathbf{L}$. Las fórmulas constituidas por con los elementos de $P(0)$ se denominan *símbolos de variable proposiconal* o *proposiciones atómicas*.

Definición 5.5 (λ-calculus)**.** Un *lenguaje para el λ-calculus* es un lenguaje $\langle L, g\rangle$ donde:

- $S_l = \{\lambda, Z\}$
- V es un conjunto,
- existe un conjunto P tal que $L = P \cup S_l \cup V$,
- los conjuntos P, S_l, y V son disjuntos dos a dos,
- $V \subseteq L(0)$,
- para todo número natural n no nulo, $P(n) = \varnothing$,
- $V \subseteq L(0)$ y $\{\lambda, Z\} \subseteq L(2)$

Definición 5.6. Sea $\mathbf{L} = \langle L, g\rangle$ un lenguaje para el λ-calculus como sugiere la Definición 5.5. Entonces:

1. Una expresión de $\mathbf{L}$ es una *átomo* sii, por definición, es de la forma x donde $x \in V \cup P$.
2. Una expresión de $\mathbf{L}$ es un *λ-término* de $\mathbf{L}$ sii, por definición, está construida según las siguientes reglas:
   a) Cualquier atómo es un término.
   b) λxM es término, siempre M sea un término.
   c) ZMN es término, siempre que M y N sean términos.
   El conjunto de los términos de $\mathbf{L}$ será representado por $\Lambda(\mathbf{L})$.

Definición 5.7. El *lenguaje para el álgebra de Boole* es el lenguaje $\mathbf{L} = \langle L, g\rangle$ que cumple:

1. $S_b = \{U, S, P, O, V\}$,
2. existe un conjunto P tal que $L = P \cup S_b$,
3. los conjuntos P y S_b son disjuntos,
4. para todo número natural n no nulo, $P(n) = \varnothing$,
5. $P(0)$ es no finito numerable,
6. $L(0) = P \cup \{O, V\}$, $L(1) = \{U\}$ y $L(2) = \{S, P\}$.

Definición 5.8 (expresión booleana)**.** Sea $\mathbf{L} = \langle L, g\rangle$ un lenguaje para el álgebra de Boole como sugiere la Definición 5.7. Llamamos *expresión boolena* de $\mathbf{L}$ a las expresiones bien formadas de $\mathbf{L}$.

Índice alfabético

λ-término, 12
álgebra
    de Boole, 12

atómo, 12

conjunto
    cerrado, 10

ebf, 4
expresión, 2
    bien formada, 4
    booleana, 12
    vacía, 2

fórmula, 11
    atómica, 11
    proposicional, 12
función peso, 3

lenguaje, 1
    para el λ-calculus, 12
    para el álgebra de Boole, 12
    para la lógica clásica, 10
    proposicional, 11
letra proposicional, 11
longitud, 3

monoide, 2

palabra
    equilibrada, 4
    significativa, 4
principio
    de lectura única, 11
proposiciones
    atómicas, 12

símbolo, 1
    de variable, 11
    de constante, 11
    de función, 11
    de predicado, 11
    de relación, 11
    de variable
      proposicional, 11
    lógico, 11
símbolo de
    variable proposicional, 12
símbolos
    de variable proposiconal, 12
segmento, 2
    final, 2
    inicial, 2, 3
    propio, 2
segmentos disjuntos, 3
subfórmula, 10
sucesión
    significativa, 4

término, 11

yuxtaposición, 2

Referencias

[1] Bourbaki, N. *Théorie des Ensembles.* Eléments de Mathématique. Hermann, 1977.

[2] K. Kunen. *The Foundations of Mathematics*, volume 19 of *Mathematical Logic and Foundations.* College Publications, 2009.