

I, Stephen Matthew Grimes, hereby certify that I translated the attached document from Hungarian into English and that, to the best of my ability, it is a true and correct translation. I further certify that I am competent in both Hungarian and English to render and certify such translation.

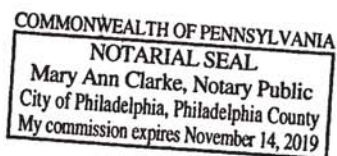
Stephen M Grimes

FULL LEGAL NAME

Sworn to before me this 9th day of March 2016.

Mary Ann Clarke

Notary Public



EXHIBIT

1016

Math.

132

Matematikai Lapok

APR 28 1980

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

THE LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA-CHAMPAIGN

APR 1 1980

Am: 14-11
Eni előzetes: 2-11

9943-6

701 Leipzig
701-1 Talstr. 29

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat beérkezett: 1978 V. 16 — Terjedelem: 17,85 (A/5) iv
78-2482 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József

INDIA: 2-11
ISSN 0025-2718

21. évfolyam, 1976—1979
3-4

Felelős szerkesztő: Császár Ákos

Szerkesztők: Lovász László, Pelikán József, Révész Pál, Rapcsák András.

Szerkesztőség: Budapest, V., Anker-köz 1-3. Telefon: 427-741.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 2.

Telephone: 111-010.

A kiadvány előfizetése

ter 1. és bármely postahivatalban. Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96162.

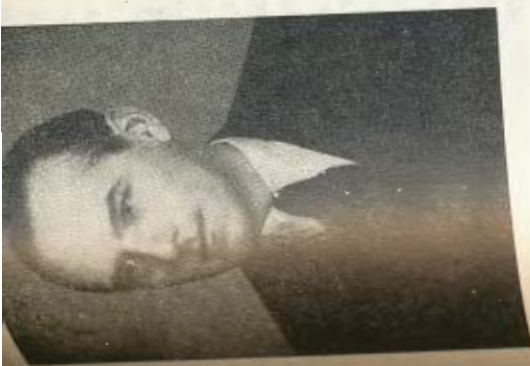
Előfizethető és példányonként megvásárolható

AZ AKADÉMIAI KIADÓNÁL, BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21.

Telefon: 11-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488,

az AKADEMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest, V., Váci u. 22. i on: 185-612

Előfizetési díj egy évre 28, Ft.



EXITS GYÖRGY

(1899. január 5.—1978. október 14.)

A magyar matematikusok Nesztorának nyolcvanadik születésnapját készültünk megünnepelni, s fájó megdöbbenéssel vettük a lesújtó hírt: bensőséges ünnep helyett csak emlékjártat tarthatunk. Elvesztettük a matematikai analízis nemzetközileg megismert kutatóját, matematikus nemzedékek nevelőjét, a tudománypolitika fárhadvezetőjét, a Magyar Matematikai Társulat tiszteletbeli elnökét, a Magyar Tudományos Akadémia elnökségének tagját, elvesszük Györgyöt.*

tanárak között, akik a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjai: elvesztettük Alexits Györgyöt. A tanárak között, akik a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjai: elvesztettük Alexits Györgyöt. A tanárak között, akik a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjai: elvesztettük Alexits Györgyöt.

* *Nexis* Gyógy tudományos munkásságának ismertetése a Matematikai Lapok 19. kötetében 22-23. lapján található.

TARTALOMJEGYZÉK

207	ALEXITS GYÖRGY (1899. jan. 5.—1978. okt. 14.)	207
211	HALÁSZ GÁBOR: Somorjai Gábor matematikai munkásságáról	211
215	SURÁNYI JÁNOS: Néhány bizonyítás az egész számok primitívezés felbontásának egytel-	215
227	mutására	227
233	RÜZSA Z. IMRE: Számelméleti függvények II.	233
317	GÉCSEGFERENC és MAGNUSSTEINBY: A faautomaták algebrai elmélete II.	317
355	FENYES TAMÁS és KOSIK PÁL: Az operátortest néhány speciális másodrendű differenciál	355
361	egyenletéről	361
365	PINTZ JÁNOS: Siegel-gyökök és a prímszámtétel	365
379	ERDŐS L. PÉTER: Egy Ramsey-típusú tétel	379
391	DÉNES TAMÁS: Páros fokszámú reguláris gráfok szögpont szerinti „evolúciója”	391
393	MÁTYÁS FERENC: Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok eleminek hányadosairól	393
425	Feladatirovat	425
	Társulati élet	
	Önismertetés	

PÁROS FOKSZÁMÚ REGULÁRIS GRÁFOK SZÖGPONT SZERINTI „EVOLÚCIÓJA”

DÉNES TAMÁS

Világos, hogy a 2. lépéshez hasonlóan
 $P_{r+1}(1; k+1; i_1, \dots, i_{k+1}) := P_{r+1}(1; k; i_1, \dots, i_{k-1}, P_{r+1}(1; 2; i_k, i_{k+1}))$

alakban is nyerhetjük.

Ezután a t -re vonatkozó indukciót a 3. lépés teljes analógiájára végezhetjük.

Így a Tétel bizonyítását lényegében befejeztük.

Végül megmutatunk egy példát a Tétel egy speciális esetének használatára.

[3]-ban a szerzők bebizonyították a következő tételt:

Tétel: Legyen k természetes szám, R pedig egy N dimenziós téglal! Ekkor létezik
 $n = n(k, R)$ természetes szám, hogy tetszőleges módon k -színezve egy n dimenziós
euklideszi tér pontjait, keletkezik egyszínű, R -rel egybevágó idomot feszítő pont-
halmaz.

Bizonyítást az $N=2$ esetre végezzük, tetszőleges N -re ugyanígy lehet végreha-
tan. Legyenek az R téglalap oldalai c és d ! Legyen továbbá $p := P_2(1; k; 2, \dots, 2)$!
Jelöljük A_1 , illetve A_2 -vel a $(p-1)$ dimenziós euklideszi tér c , illetve d élti szabályos 2-
színp lexét! Megmutatjuk, hogy a $(2p-2)$ dimenziós euklideszi tér tetszőleges 2-
színezése esetén az $A_1 \times A_2$ pontthalmazból már ki tudunk választani R -rel egybe-
vágó egyszínű pontthalmazt. Ehhez rendezzük az (a_i, b_i) alakú vektorokkal repre-
zentált $A_1 \times A_2$ direktorzat elemeit olyan $(c_i^1, c_i^2) = M$ kétdimenziós mátrixba,
ahol c_j^1 az A_1 szimplex i_j -ik csúcsa. Mivel két pont távolsága az $A_1 \times A_2$ szorzatban
hátszak az első koordinátában térnek el, c , ha a másodikban csak, akkor d , így az
 M -mátrix 2×2 -es almatrixai éppen R -rel egybevágó pontthalmazokat reprezentálnak.
A mátrix méreteinek választása miatt, ami éppen $p \times p$ -es, elemeinek tetszőleges k -
színezése mellett van egyszínű 2×2 -es almatrix, így a bizonyítást befejeztük. (Ez
a bizonyítás kicsit egyszerűbb is az eredetinél.)

IRODALOM

- [1] ERDŐS P.: On extremal Problems of Graphs and Generalized Graphs, *Israel J. of Math.* 2 (1963) 189—190.
- [2] SMALLWOOD, C. V.: Partitions of sets of matrices, *Discrete Math.* Vol. 13 N. 3 (1975, nov) 261—277.
- [3] ERDŐS P.—GRAHAM, R. L.—MONTGOMERY, P.—ROTHSCHILD, B. L.—SPENCER, J.: *Combinatorics* E. G.: Euclidean Ramsey Theorems I, *J. of Comb. Theory Ser. A* 14 (1973) 341—363.
- [4] GRAHAM, R. L.—LEEB, K.—ROTHSCHILD, B. L.: Ramsey's Theorem for a Class of Categories, *Advanced in Mathematics* 8 (1972) 417—433.
- [5] GRAHAM, R. L.—ROTHSCHILD, B. L.: Ramsey's Theorem for n -parameter Sets, *Trans. A. M. S.* 159 (1971) 257—292.
- [6] GRAHAM, R. L.—ROTHSCHILD, B. L.: Ramsey's Theorem for n -dimensional arrays, *Bull. A. M. S.* 75 (1969) 418—422.
- [7] SPENCER, J. H.: Ramsey's Theorem for Spaces, Preprint.
- [8] BURR, S. A.—ERDŐS P.—LOVÁSZ L.: On Graphs of Ramsey Type, *Ars Combinatoria* Vol 1 (1976) 167—190.
- [9] NEŠETŘIL, J. and RÖDL, V.: Ramsey property of graphs with forbidden complete subgraphs, *J. Combinatorial T. (B)* 20 (1976) 243—249.
- [10] NEŠETŘIL, J. and RÖDL, V.: Type theory of partition problems of graphs in “Recent Advances of Graph Theory”, Academia, Prague 1975, 405—412.
- [11] CHOATEL, V.: On Finite Polarized Partition Relations, *Canad. Math. Bull.* 12 (1969) 321—324.

ОДНА ТЕОРЕМА ТИПА РЕМСИ

ПЕТЕР Л. ЭРДŐШ

A RAMSEY TYPE THEOREM

P. L. ERDŐS

Általában érdekes a gráfok körében azt a problémát vizsgálni, hogy azonos
strukturával rendelkező, de eltérő szögpont, illetve élszámú gráfok milyen transzfor-
mációval vihetők át egymásba.

Például egy Γ_n n szögpontú teljes gráf előállítható a Γ_{n-1} $n-1$ szögpontú teljes
gráfól úgy, hogy hozzáveszünk egy szögpontot és azt Γ_{n-1} minden szögpontjával
teljesítjük éllel. Ugyanez a transzformáció bármely más fokszámú reguláris gráf-
ra is alkalmazható, amelynek van szögpont. Más aspektusból foglalkozott gráf evolúcióval [3]-ban
Erdős Pál és Rényi Alfréd.

Jelen dolgozatban csak irányítatlan, páros fokszámú reguláris gráfokkal fog-
lalkozunk.

A dolgozat első részében definiáljuk az evolúciós transzformációt és ezzel kap-
csolatos egyszerű tételeket bizonyítunk be, a második és harmadik részben azokról
gráfokról szólnunk, amelyekre nem alkalmazható a transzformáció.

1. Definíció. Legyen $\Gamma_n = (P, E)$ n szögpontú egyszerű gráf és $p_i \in P$, $p_j \in P$
zamszedos szögpontok, valamint p olyan szögpont, amely p_i , p_j egyikével sem szom-
szagos. $(P$ és E a Γ_n gráf szögpont, illetve élhalmazát jelöli.)

A p szögponttal végzett EC transzformáción értjük a következőt:

$$EC: E \rightarrow E'$$

$$E' = E \setminus \{(p, p_i)\} \cup \{(p, p_i), (p, p_j)\}$$

Így a szögponttal jelöljük az összes páros reguláris gráfok halmazát \mathcal{P} -rel, az
és 2, 4, ..., k (k páros) fokszámú reguláris gráfok halmazát pedig rendre \mathcal{P}_2 ,
..., \mathcal{P}_k -vel.

Ekkor nyilván teljesül a következő:

1. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_4 \cup \dots \cup \mathcal{P}_k \cup \dots$
2. $\forall i \neq j$ (i, j páros) esetén $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset$
3. $\forall \Gamma_{n,k} \in \mathcal{P}_k$ gráfhoz $\exists ! \mathcal{P}_k: \Gamma_{n,k} \in \mathcal{P}_k$

Így a \mathcal{P} halmaz egy osztályozásáról van szó.

2. Definíció. Legyen $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{P}_k$ tetszőleges n szögpontú, k -reguláris gráf.

Abból $\Gamma_{n,k} = (P, E)$ és $\Gamma_{n+1} = (P \cup \{p\}, E')$, ahol $p \notin P$.

A p szögponttal végzett ET transzformáción értjük a p szögponttal végzett
 EC transzformációt, azaz legyenek (p_1, p_2) , (p_3, p_4) , ..., (p_{k-1}, p_k) $\Gamma_{n,k}$ -beli élek,

$$ET: \Gamma_{n,k} \rightarrow \Gamma_{n+1}$$

ahol

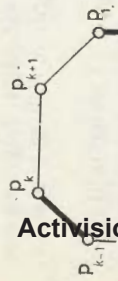
$$E' = E \setminus \{(p_1 p_2), (p_3 p_4), \dots, (p_{k-1} p_k)\} \cup \{(pp_1), (pp_2), \dots, (pp_k)\}.$$

1. Tétel. Legyen k tetszőleges páros szám. Minden $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{P}\mathcal{B}_k$ gráfra alkalmazható ET transzformáció.

BIZONYÍTÁS. Elég belátnunk, hogy $\Gamma_{n,k}$ -ban létezik $k/2$ független él. A bizonyításhoz felhasználjuk G. A. Dirac [2] következő tételét:

„Ha egy egyszerű gráf minden szögpontjának foka legalább r ($r > 1$), akkor van a gráfban egy legalább $r+1$ hosszúságú kör.”

Jelöljük $\Gamma_{n,k}$ egy $k+1$ hosszúságú körét K -val (az idézett tétel alapján ilyen biztos van), ekkor például az 1. ábrán látható módon kiválasztva az éleket $(p_1 p_2), (p_2 p_3), \dots, (p_{k-1} p_k)$ egy pontosan $k/2$ független élből álló élhalmazzt kapunk.



3. Definíció. Legyen $\Gamma_{n,k} = (P, E) \in \mathcal{P}\mathcal{B}_k$, valamint $p \in P$ és jelöljük $p_1 p_2, p_3 p_4, \dots, p_{k-1} p_k$ -val a p szomszédaiból alkotott, páronként nem szomszédos szögpontpárok halmazát. Ekkor ET^{-1} transzformáció a következőt értjük:

$$(3) \quad ET^{-1}: \Gamma_{n,k} \rightarrow \Gamma_{n-1} = (P', E'), \quad P' = P \setminus \{p\} \\ E' = E \setminus \{(pp_1), (pp_2), \dots, (pp_k)\} \cup \{(p_1 p_2), \dots, (p_{k-1} p_k)\}$$

4. Definíció. Legyen $\Gamma_n = (P, E)$ n szögpontú gráf, $p \in P$ és q_1, q_2, \dots, q_n a p szögpont Γ_n -beli szomszédei. A p által generált Γ_n -beli részgráfon (jelöljük ezt $G_p = (P', E')$ -vel) értjük Γ_n -nek azt a részgráfját, melyre teljesül, hogy $P' = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ és $(q_i q_j) \in E' \Leftrightarrow (q_i q_j) \in E$.

5. Definíció. Legyen $\Gamma_n \in \mathcal{P}\mathcal{B}$ és $p \in \Gamma_n$. A p szögpont T -tulajdonságú, ha az általa generált Γ_n -beli részgráf komplementere tartalmaz 1 -faktort.

6. Tétel. Egy $\Gamma_{n,k} = (P, E) \in \mathcal{P}\mathcal{B}_k$ gráfra akkor és csak akkor alkalmazható ET^{-1} transzformáció, ha létezik $p \in \Gamma_{n,k}$ T -tulajdonságú szögpontja.

BIZONYÍTÁS. Szükségesség: Az ET^{-1} transzformáció definíciójából következik, hogy létezik $p \in \Gamma_{n,k}$ melynek szomszédaiból kiválaszthatók a $p_1 p_2, p_3 p_4, \dots, p_{k-1} p_k$ páronként nem szomszédos szögpontpárok. Ezek a p_1, p_2, \dots, p_k szögpontokból alkotott $\Gamma_{n,k}$ -beli részgráf komplementerében szomszédosak lesznek és éppen egy 1 -faktort alkotnak, hiszen bármely két szögpontpárnak sincs közös szögpontja. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy a p szögpont T -tulajdonságú.

Elegendőség: Ebben az irányba a bizonyítás pontosan az előző gondolatmenet megfordítása.

3. Tétel. Minden páros $k \equiv 4$ számhoz létezik $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{P}\mathcal{B}_k$ gráf, amelynek n T -tulajdonságú szögpontja.

Ekvivalens megfogalmazásban: Minden páros $k \equiv 4$ számhoz létezik $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{P}\mathcal{B}_k$ gráf, amely egyetlen $\Gamma_{n-1,k} \in \mathcal{P}\mathcal{B}_k$ gráfból sem áll elő ET transzformációval.

BIZONYÍTÁS. Legyen k tetszőleges ($k \equiv 4$) páros szám. Tekintsünk két $k+1$ szögpontú $\Gamma_{k+1,k}^1 = (P_1, E_1)$ és $\Gamma_{k+1,k}^2 = (P_2, E_2)$ teljes gráfot. Legyenek $(p_{11} p_{12}), \dots$

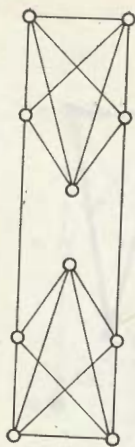
$(p_{11} p_{12}) \in E_2$, ekkor képezzük a következő $\Gamma_{n,k} = (P, E)$ gráfot

$$(4) \quad P = P_1 \cup P_2 \\ (5) \quad E = E_1 \cup E_2 \setminus \{(p_{11} p_{12}), (p_{12} p_{13})\} \cup \{(p_{11} p_{12}), (p_{11} p_{13})\}$$

Az esetben $\Gamma_{n,k}$ a 2. ábrán látható.

Bizonyítjuk, hogy az így konstruált $\Gamma_{n,k}$ gráfnak nincs T -tulajdonságú szögpontja. Mivel minden így konstruált $\Gamma_{n,k}$ gráf szimmetrikus, a bizonyítást elég az egyik $\Gamma_{k+1,k}^1$ szimmetrikus részgráfszögpontjára elvégezni. Így két eset különböztethető meg:

- p_{11}, p_{12} } szögpontot
- bármely másik } vizsgáljuk



Az a) esetben jelöljük a p_{11} szomszédaiból alkotott részgráfot $G_1 = (A_1, B_1)$ -el, akkor

$$(6) \quad A_1 = P_1 \cup \{p_{12}\} \setminus \{p_{11}\} \\ (7) \quad B_1 = E_1 \setminus \{(p_{11} p_{12})\} \cup \{p_{12} p_{13}\}$$

Tehát $\bar{G}_1 = (A'_1, B'_1)$ a következő lesz

$$(8) \quad A'_1 = A_1 \\ (9) \quad B'_1 = \{(p_{12} p_{13})\} \cup \{p_{12} p_{14}\} \setminus \{p_{11}\}$$

\bar{G}_1 nem tartalmaz 1 -faktort, vagyis p_{11} (és ugyanilyen megfontolásokból p_{12}, p_{13}, \dots) nem T -tulajdonságú.

b) esetben legyen $p \neq p_{11} \neq p_{12}$ és $p \in P_1$, a p szomszédaiból alkotott részgráf $G_2 = (A_2, B_2)$ a következő:

$$(10) \quad A_2 = P_1 \setminus \{p\} \\ (11) \quad B_2 = E_1 \setminus \{(p_{11} p_{12}), (pp_{12})\} \cup \{p_{12} p_{13}\}$$

Tehát $\bar{G}_2 = (A'_2, B'_2)$ az alábbi lesz:

$$(12) \quad A'_2 = A_2 \\ (13) \quad B'_2 = \{(p_{12} p_{13})\}$$

\bar{G}_2 szintén nem tartalmaz 1 -faktort, vagyis a b) esethez tartozó szögpontok egyike sem T -tulajdonságú. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A 3. tétel tehát így is megfogalmazható: A $\mathcal{P}\mathcal{B}_k$ gráfok mindegyike tartalmaz VP gráfot. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett nem T -tulajdonságú egy szögpont. Felhasználjuk az alábbi ismert eredményt [1].

6. Definíció. Egy $\mathcal{P}\mathcal{B}$ -beli gráfot VP vagy szögpont *prim* gráfnak nevezzük, ha nincs T -tulajdonságú szögpontja.

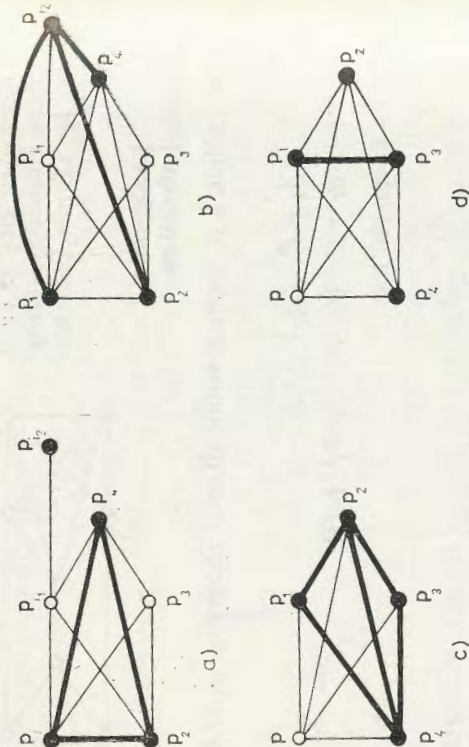
A 3. tétel tehát így is megfogalmazható: A $\mathcal{P}\mathcal{B}_k$ gráfok mindegyike tartalmaz VP gráfot.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett nem T -tulajdonságú egy szögpont. Felhasználjuk az alábbi ismert eredményt [1].

1. Lemma. Egy teljes Γ_n (n páros) gráf $n-1$ elsőfokú faktor szorzatára bont-
ható.

4. Tétel. Legyen $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{P}\mathcal{B}_k$ és $p \in \Gamma_{n,k} = (P, E)$. Ha p nem T -tulajdonságú, akkor
tezik legalább $k-1$ három hosszúságú kör, amely p -t tartalmazza.

Bizonyítás. Ha p nem T -tulajdonságú, akkor az általa generált $\Gamma_{n,k}$ -beli részgráf
jelölje $G=(A, B)$ komplementere nem tartalmaz 1 -faktort. Az 1. lemma szerint



3. ábra

\bar{G} $k-1$ féle elfüggetlen 1 -faktort tartalmazhat, így \bar{G} -ben ezen faktorok mindegyiké-
ből legalább egy élnek szerepelnie kell ahhoz, hogy \bar{G} -ben ne legyen 1 -faktor. Tehát
 G élének száma legalább $k-1$. Mivel G minden élének végpontjai p szomszédai,
így p tartalmazó három hosszúságú kört alkotnak. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.
így p $k=4$ esetén az alábbi esetekben nem T -tulajdonságú a p szögpont (lásd 4/a, b,
c, d, e, f, g, h ábra, \bar{G} vastag vonallal húzva).

Lemma. Legyen Γ_n n szögpontú (n páros) teljes gráf és jelöljük Γ_n össze-
írásainak számát F_n -nel. Ekkor

$$(14) \quad F_n = \frac{\binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}.$$

BIZONYÍTÁS. Könnyen látható, hogy $n=2$ esetén az állítás igaz. Tegyük fel,
hogy minden $k \leq n-2$ esetén igaz az állítás, vagyis

$$(15) \quad F_k = \frac{\binom{k}{2} \cdot \binom{k-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{k}{2}\right)!}.$$

Ekkor Γ_k -hoz két szögpontot hozzávéve $k+1$ féle új szögpontpár választható ki (a két
pont sorrendjét nem vesszük figyelembe), melyek mindegyikéhez F_k számú 1 -faktor
tartozik, melyeknek pontosan egy közös élük van, így

$$(16) \quad F_{k+2} = (k+1) \cdot F_k.$$

Figyelembevéve, hogy

$$(17) \quad \frac{\binom{k+2}{2}}{\frac{k+2}{2}} = \frac{2 \cdot (k+2)!}{2! k! (k+2)} = k+1.$$

Tehát

$$(18) \quad F_{k+2} = \frac{\binom{k+2}{2}}{\frac{k+2}{2}} \cdot \frac{\binom{k}{2} \cdot \binom{k-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{k}{2}\right)!} = \frac{\binom{k+2}{2} \cdot \binom{k}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{k+2}{2}\right)!}.$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Korollárium. 1. A (16) összefüggés alapján F_n rekurzív módon is felírható:
(19)

$$F_n = (n-1) \cdot F_{n-2}.$$

2. A 2. lemma bizonyításából adódik, hogy ha e_i egy Γ_n -beli E 1 -faktorhoz tartozó
él, akkor pontosan F_{n-2} olyan 1 -faktor van Γ_n -ben, amely E -vel pontosan az e_i közös
és tartalmazza.

3. Ha a Γ_n -beli éldiszjunkt 1 -faktorok számát FD_n -nel jelöljük, akkor az 1. lemma
(19) alapján:

$$FD_n = F_n \Leftrightarrow n-1 = (n-1) \cdot F_{n-2} \Rightarrow 1 = F_{n-2} \Rightarrow n=4.$$

azaz

$$F_n = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \dots \cdot \frac{2!}{2!0!} = \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!}.$$

7. Definíció. Legyen Γ_n n szögpontú gráf és

(20)

$$\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$$

Γ_n -beli 1-faktorok egy halmaza, valamint e_1, e_2, \dots, e_p Γ_n -beli élek.

Az e_1, e_2, \dots, e_p éleket az \mathcal{E} egy reprezentációjának mondjuk, ha minden \mathcal{E} -beli 1-faktorból legalább egy él szerepel köztük.

3. Lemma. Legyen Γ_n teljes gráf (n páros). Jelölje Γ_n összes 1-faktorainak halmazát

$$\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_r\} \quad \text{ahol} \quad r = F_n$$

valamint

$$R = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$$

Γ_n -beli élek egy halmazát.

R akkor és csak akkor reprezentációja \mathcal{E} -nek, ha bármely $e_i \neq e_j$ esetén nincs olyan $E_k \in \mathcal{E}$, amelyre $e_i \in E_k$ és $e_j \in E_k$.

BIZONYÍTÁS. Szükségesség: Tegyük fel, hogy R reprezentációja \mathcal{E} -nek és létezik $e_i \neq e_j$ melyre létezik E_k , hogy $e_i \in E_k$ és $e_j \in E_k$. A 2. lemma 2. korolláriuma alapján az e_i és e_j közötti 1-faktort reprezentált, ugyanígy e_j is. Mivel mindkettő él szerepel E_k -ban, így a két él által reprezentált 1-faktorok K_{ij} számára igaz, hogy

$$K_{ij} < 2 \cdot F_{n-2}.$$

Ha tehát feltételezzük, hogy a többi R -beli $n-3$ él mindegyike a maximális $n-1$ 1-faktort reprezentálja, akkor az R által reprezentált \mathcal{E} -beli elemek $K_{\mathcal{E}}$ számára igaz, hogy

$$K_{\mathcal{E}} < (n-1) \cdot F_{n-2}$$

amellentmondás, hiszen \mathcal{E} elemeinek száma $(n-1) \cdot F_{n-2}$ és R \mathcal{E} -nek reprezentációja tehát $K_{\mathcal{E}}$ -re az egyenlőségnek kell teljesülnie.

Elegendőség: Mivel minden $E_k \in \mathcal{E}$ 1-faktor csak egy $e_i \in R$ élt tartalmaz, valamint a 2. lemma 2. korolláriuma alapján egy e_i és F_{n-2} \mathcal{E} -beli 1-faktort reprezentál, így az $n-1$ számú R -beli él $(n-1) \cdot F_{n-2}$ számút, ami \mathcal{E} összes elemét jelenti.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

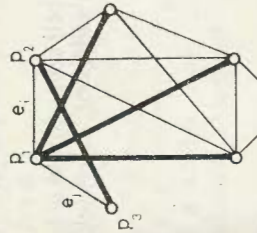
5. Tétel. Egy Γ_n teljes gráf ($n \geq 4$ páros) összes 1-faktora akkor és csak akkor reprezentálható pontosan $n-1$ éllel, ha azok egy szögpontra illeszkednek.

BIZONYÍTÁS. Szükségesség: Legyen $p \in \Gamma_n$ a vizsgált szögpont. Mivel minden Γ_n -beli 1-faktor tartalmaz egy p -re illeszkedő élt, így az összes ilyen él valóban Γ_n -beli összes 1-faktorok egy $n-1$ elemű reprezentációja.

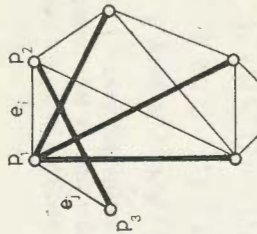
Elegendőség: Tekintsünk egy tetszőleges $(p_1, p_2) = e_i \in \Gamma_n$ élt (p_1, p_2 az e_i él végpontjai). Legyen ez az $n-1$ elemű reprezentáció első eleme. A 3. lemma alapján második elemnek csak olyan e_j él választható, amely egyetlen e_i -t tartalmazó 1-faktorból sem

pépel. Könnyen látható, hogy ilyen él csak azok közül választható, amelyek egyik pontja p_1 vagy p_2 . (Lásd 5. ábra.) (A vastagon kihúzott élek a választhatók.) Tegyük fel, hogy egy $(p_1, p_2) = e_j$ élt választunk a reprezentáció második elemének (lásd 6. ábra).

A 3. lemma szerint továbbra is a p_1 , illetve p_2 szögpontokra illeszkedő (még választható) élek közül választhatunk, azonban most már az e_j élre is alkalmazzuk



5. ábra



6. ábra

a 3. lemmát, így a keresett reprezentációnak p_3 -ra is illeszkednie kell. Ilyen él azonban csak a (p_2, p_3) él lehet. Ezzel azonban a választható élek elfogytak. Ez a kivágás tehát akkor és csak akkor alkot reprezentációt, ha $n=4$, az összes többi esetben csak a p_1 -re illeszkedő $n-1$ él választható a reprezentáció elemeiként (ezt a szükségesé az $n > 4$ kikötést). Ezzel a tételt bebizonyítottuk. Az $n=4$ esetben az összes reprezentáció látható a 4. ábrán.

A továbbiakban bemutatunk egy olyan gráf típust, amelyről bizonyos feltételek mellett kimutatható, hogy VP gráf. Majd megvizsgáljuk, hogy adott k páros szám esetén melyik a legkisebb n szám, amelyre $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{P}\mathcal{G}_k VP$ gráf.

Jelöljük az összes teljes gráfok halmazát C -vel, elemeit a szögpontszám szerint rendezve rendre a $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ jelekkel. (Azaz C_n jelöli az n szögpontú teljes gráfot.)

8. Definíció. Legyenek $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_t}$ C -beli gráfok (nem feltétlenül különbözők) és vezessük be a $C_{i,j} = (P_j, E_j)$ $j=1, 2, \dots, t$ jelölést.

A $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_t}$ gráfok t -kompozícióján (jelölése: \boxed{t}) értünk egy olyan $\Gamma = (P, E)$ gráfot, amelyre teljesülnek az alábbiak:

- Γ reguláris gráf
- $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_t, \quad \forall i \neq j: P_i \cap P_j = \emptyset$
- $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_t \cup E', \quad \forall i \neq j: E_i \cap E_j = \emptyset,$

ahol E' az úgynevezett kötőélek halmaza.

MEGJEGYZÉSEK. 1. Az E' éhalmaz nem egyértelműen meghatározott.

2. A Γ gráf összefüggőségét E' határozza meg, hiszen ha $E' = \emptyset$, akkor Γ egy teljes gráf, azaz $\Gamma = C_n$.

3. Ha $\Gamma = \Gamma_{n,k}$ és $\max(i_1, i_2, \dots, i_t) = l$, akkor $l \leq k+1$.

6. Tétel. Legyen $\Gamma_n = (P, E)$ n szögpontú összefüggő gráf. Ha létezik Γ_n -ben $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ szögpontú teljes részgráf, akkor Γ_n -ben nincs 1-faktor. ($\bar{\Gamma}_n$ a Γ_n gráf komplementer gráfiát jelöli.)

$$\left\{ \left[\frac{n}{2} \right] \quad n \frac{1}{2} \right\}$$

7. Tétel. Legyen $\Gamma_n \in \mathcal{P}\mathcal{R}_k, k \geq 4$. Ha

$$1. C_j \in C \quad j = 1, 2, \dots, t \equiv 2.$$

$$2. \Gamma_{n,k} = C_{i_1} \overline{t} C_{i_2} \overline{t} \dots \overline{t} C_{i_\ell}$$

$$n, \text{EA} \quad \frac{k+4}{2} \leq i_j \leq k \quad j = 1, 2, \dots, t \triangleq 2$$

$$\frac{k+4}{2}$$
 $t = 2$

$$i_1 = i_2 = \frac{k+4}{2},$$



A 8. tételt figyelembe véve adódik, hogy

$$k+2 \leq m_{\min} \leq k+4 \quad (25)$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyítást fokszám szerinti teljes indukcióval végezzük. $k=2$ esetén a 10. ábrán látható gráfot kapjuk, amelyre az állítás könnyen belátható.



felöljük G_p -vel a p , illetve q szögpont által generált $\Gamma_{n,k}$ -beli részgráfot.

...a tételt bebizonyítottuk.

372

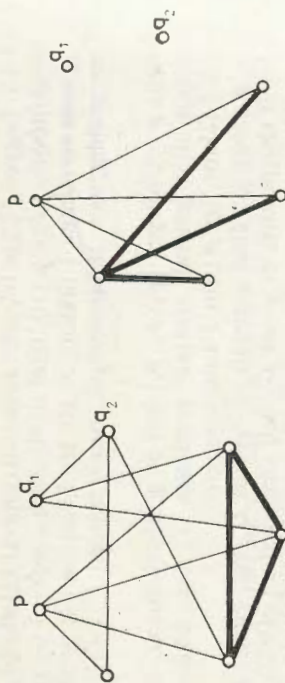
[3] ERDŐS P., RÉNYI A.: On the evolution of random graphs. *MTA Matematikai Kutató Int. közleményei* V. évf. A sorozat 1–2 füzet, 1960.

«ЭВОЛЮЦИЯ» РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ ЧЁТНОГО ПОРЯДКА ПО ИХ ПЕРШИНАМ

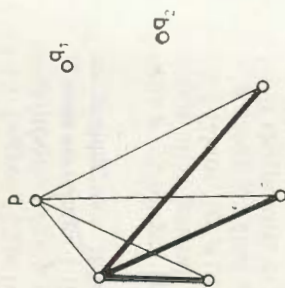
ТАМАШ ДЕНЕШ

THE "EVOLUTION" OF REGULAR GRAPHS

T. DÉNES



17. ábra



18. ábra

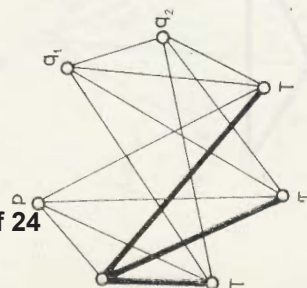
Negjegyezzük, hogy a 10. tételbeli gráf konstrukció jóval általánosabb feltételek mellett is a kívánt tulajdonságú gráfot eredményezi, azonban célunk csak az existenciabizonyítás volt, amihez ez is elegendőnek bizonyult.

Á.8., 11. és 12. tétel alapján már pontosíthatjuk a (25) egyenlőséget és ki-
mondhatjuk az alábbi tételt:

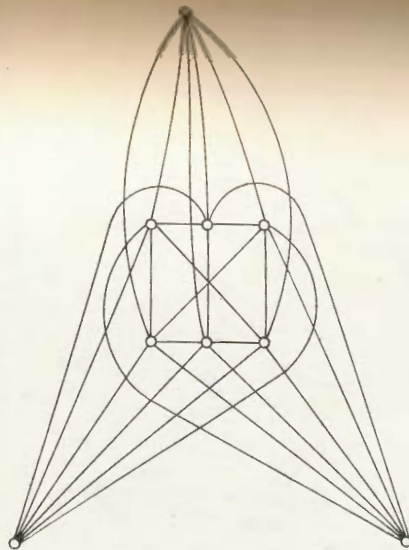
Rock 1. Tétel. Bármely $k \geq 4$ páros szám esetén a legkisebb n_{\min} szám, amelyre

$$n_{\min} = \begin{cases} k+3 & \text{ha } k \geq 6 \\ k+4 & \text{ha } k = 4. \end{cases} \quad (26)$$

Ex 19. A 13. tétel illusztrálására a $k=4$ eset a 9. ábrán látható, a $k=6$ esetre pedig a 20. ábrán mutatunk be egy példát.



19. ábra



20. ábra

[Back Cover]

Price: 14 HUF [Hungarian Forints]
Yearly subscription: 28 HUF

Responsible Party for publication is Director of Academic Publishing
Editorial content: István Sándor
Date of publication: May 16, 1978 – Size: 17.85 (A/5) iv
78-2482 – Szeged Press – Director: Jozsef Dobó

Index: 25 564
ISSN 0025—519X

[Front Cover]

Mathematical Proceedings
János Bolyai Mathematical Society

[Stamp: The Library of the University of Illinois]

Edition 27: 1976-1979, 3-4

“Evolution” by vertex of even-order regular graphs

Tamás Dénes

In graph theory circles, it is generally interesting to examine a structurally similar problem, but from a different point of view, to see alternate forms of graphs under certain transformations.

For example, Γ_n , the n -vertex complete graph, can be constructed from Γ_{n-1} , the complete graph on $n-1$ vertices, by adding a vertex and connecting it to each vertex of Γ_{n-1} . The same transformation on any other regular graph of other degree does not achieve the goal. Pal Erdős and Alfréd Rényi addressed graph evolution in [3] from another perspective.

In the present work we are only concerned with undirected, even-order regular graphs.

In the first section of this paper we define the evolutionary transformation and prove several related theorems. The second and third sections concern graphs for which the transformation cannot be applied.

Definition 1. Let $\Gamma = (P, E)$ be an n -vertex simple graph and $p_i \in P$, $p_j \in P$ be neighboring vertices, and p be a vertex which is a neighbor to neither p_i nor p_j . (P and E represent the sets of vertices and edges of the graph Γ .)

We take the EC transformation on vertex p to be the following:

$$(1) \quad EC: E \rightarrow E'$$

$$\text{where} \quad E' = E \setminus \{(p_i p_j)\} \cup \{(pp_i), (pp_j)\}$$

Herein we designate the set of all even regular graphs using as \mathbf{PR} and the sets of all 2, 4, ..., k (k even) order regular graphs as $\mathbf{PR}_2, \mathbf{PR}_4, \dots, \mathbf{PR}_k$. Then the following must be the case:

1. $\mathbf{PR} = \mathbf{PR}_2 \cup \mathbf{PR}_4 \cup \dots \cup \mathbf{PR}_k \cup \dots$
2. $\forall i \neq j, (i, j \text{ even}), \mathbf{PR}_i \cap \mathbf{PR}_j = \emptyset$
3. $\forall \Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}_k, \exists ! \mathbf{PR}_k: \Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}_k$; that is, the set \mathbf{PR} has a classification.

Definition 2. Let $\Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}_k$ be an n -vertex, k -regular graph. Further suppose $\Gamma_{n,k} = (P, E)$ and $\Gamma_{n+1} = (P \cup \{p\}, E')$, where $p \notin P$.

We take the ET transformation on vertex p to be the $k/2$ EC transformation on vertex p , that is, let $(p_1 p_2), (p_3 p_4), \dots, (p_{k-1} p_k)$ be edges in $\Gamma_{n,k}$, then

$$(2) \quad ET: \Gamma_{n,k} \rightarrow \Gamma_n$$

Mathematical Proceedings

[page 365]

$$\text{where } E' = E \setminus \{(p_1 p_2), (p_3 p_4), \dots, (p_{k-1} p_k)\} \cup \{(pp_1), (pp_2), \dots, (pp_k)\}$$

Theorem 1. Let k be an even number. The ET transformation can be used for every $\Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}_k$.

PROOF. It is sufficient if we observe that in every $\Gamma_{n,k}$ there exist $k/2$ independent edges. For the proof we use the following theorem from G. A. Dirac [2]:

“If in a simple graph every vertex has degree of at least r ($r > 1$), then there exists a cycle in the graph of length at least $r + 1$.”

If we take K to be a cycle of length $k+1$ in $\Gamma_{n,k}$ (one certainly exists on the basis of the theorem cited), then using the method illustrated in figure 1 to select the edges $(p_1p_2), (p_3p_4), \dots, (p_{k-1}p_k)$ we get a set of exactly $k/2$ unconnected edges.

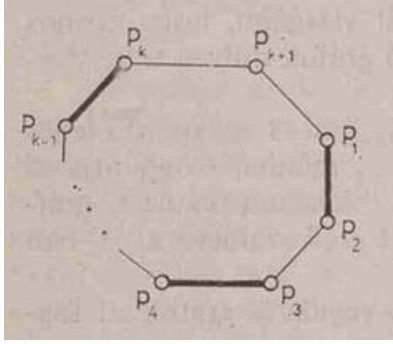


Figure 1

Definition 3. Let $\Gamma_{n,k} = (P, E) \in \mathbf{PR}_k$, $p \in P$, and we take the vertex pairs $p_1p_2, p_3p_4, \dots, p_{k-1}p_k$ to be neighbors of p but pairwise not neighbors. Then we take the ET transformation to be:

$$(3) \text{ET}^{-1}: \Gamma_{n,k} \rightarrow \Gamma_{n-1} = (P', E'), \quad P' = P \setminus \{p\} \\ E' = E \setminus \{(pp_1), (pp_2), \dots, (pp_k)\} \cup \{(p_1p_2), (p_3p_4), \dots, (p_{k-1}p_k)\}$$

Definition 4. Let $\Gamma_n = (P, E)$ be a graph on n vertices, $p \in P$, and q_1, q_2, \dots, q_r be neighbors of p in Γ_n . Then we take the subgraph of Γ_n generated by p (designate this $G_p = (P', E')$), and it turns out this is the subgraph where $P' = \{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ and $(q_i, q_j) \in E' \Leftrightarrow (q_i, q_j) \in E$.

Definition 5. Let $\Gamma_n \in \mathbf{PR}$ and $p \in \Gamma_n$. Then the vertex p is T-characterized if the complement of the subgraph on Γ_n generated by it contains a 1-factor.

Theorem 2. The ET^{-1} transformation can be applied to a graph $\Gamma_{n,k} = (P, K) \in \mathbf{PR}_k$ if and only if there exists a T-characterized vertex $p \in \Gamma_{n,k}$.

PROOF. Necessity: From the definition of ET^{-1} it follows that there exists $p \in \Gamma_{n,k}$ from which we can select neighbors $p_1p_2, p_3p_4, \dots, p_{k-1}p_k$ which are pairwise not neighbors. In the complement of the subgraph on Γ_n constructed on p_1, p_2, \dots, p_k they will be neighbors, and they comprise a 1-factor, as any two vertex pairs have no common vertex. This is precisely what it means for the vertex p to be T-characterized.

Sufficiency: The proof in this direction is the exactly the reverse of the above necessity proof.

Theorem 3. For every even $k \geq 4$ there is a graph $\Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}_k$ which has no vertex p which is T-characterized.

Equivalent formulation: For every even $k \geq 4$ there exists a graph $\Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}_k$ for which no graph $\Gamma_{n-1,k} \in \mathbf{PR}_k$ can be constructed with the ET transformation.

PROOF. Let k be an arbitrary even number, $k \geq 4$. Let us examine two complete graphs on $k+1$ vertices $\Gamma_{k+1,k}^1 = (P_1, E_2)$ and $\Gamma_{k+1,k}^2 = (P_2, E_2)$. Let $(p_{i1}, p_{j1}) \in E_1$ and $(p_{i2}, p_{j2}) \in E$. Then we construct the following

graph $\Gamma_{n,k} = (P, E)$

[page 366]

$$(4) \quad P = P_1 \cup P_2$$

$$(5) \quad E = E_1 \cup E_2 \setminus \{ (p_{i1}, p_{j1}), (p_{i2}, p_{j2}) \} \cup \{ (p_{i1}, p_{i2}), (p_{j1}, p_{j2}) \}$$

The graph $\Gamma_{n,k}$ where for $k = 4$ is illustrated in figure 2.

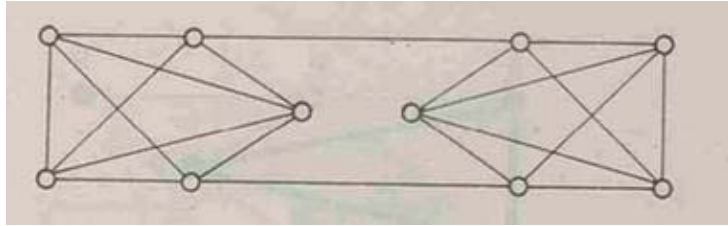


Figure 2

We will demonstrate that $\Gamma_{n,k}$ constructed in this way has does not have a T-characterized vertex.

As every graph $\Gamma_{n,k}$ constructed in this way is symmetric, for the proof it is enough to demonstrate for each vertex of the subgraph (for example $\Gamma_{k+1,k}^1$). Here we can differentiate between two cases of selected pairs of vertices:

- a) p_{i1}, p_{j1}
- b) any other pair

For the case in a), we take $G_1 = (A_1, B_1)$ to be the subgraph constructed on neighbors of p_{i1} . Then:

$$(6) \quad A_1 = P_1 \cup \{p_{i2}\} \setminus \{p_{i1}\}$$

$$(7) \quad B_1 = E_1 \setminus \{ (p_{i2}p_r) \mid \forall p_r \in P_1 \setminus \{p_{i1}\} \}$$

So the complement $\bar{G}_1 = (A'_1, B'_1)$ is therefore the following:

$$(8) \quad A'_1 = A_1$$

$$(9) \quad B'_1 = E_1 \setminus \{ (p_{i2}p_s) \mid \forall p_s \in P_1 \setminus \{p_{i1}\} \}$$

So \bar{G}_1 does not contain a 1-factor, that is, p is not T-characterized (and similarly $p_{i2}, p_{j1}, \dots, p_{j2}$). For the case in b), let $p \in P_1, p \neq p_{i1} \neq p_{j1}$, and $G_2 = (A_2, B_2)$ be the subgraph constructed on the neighbors of p :

$$(10) \quad A_2 = P_1 \setminus \{p\}$$

$$(11) \quad B_2 = E_2 \setminus \{ (p_{i1}p_{j1}), (pp_r) \mid \forall p_r \in P_1 \setminus \{p\} \}$$

Then $\bar{G}_2 = (A', B')$ will be the following:

$$(12) \quad A'_2 = A_2$$

$$(13) \quad B'_2 = \{ (p_{i1}p_{j1}) \}$$

So \bar{G}_2 does not contain a 1-factor, that is, no vertex in case b) is T-characterized. And so the 2 theorem is proved.

In figure 3/a-d the graphs $G_1, \bar{G}_1, G_2, \bar{G}_2$ are illustrated for $k = 4$. (The bolded edges and vertices belong to the corresponding graphs.)

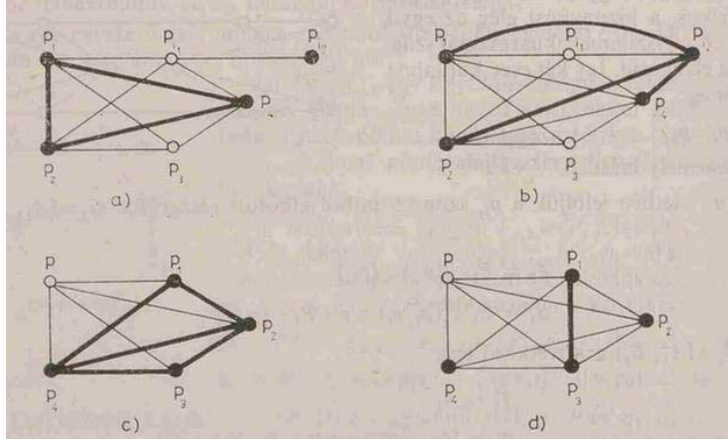


Figure 3

6. Definition. We define a Vertex Prime (VP) graph as a graph in \mathbf{PR} which contains T-characterized vertex.

Then Theorem 3 can be formulated as follows: Each of the classes of graphs $\mathbf{PR}_4, \mathbf{PR}_6, \dots, \mathbf{PR}_k, \dots$ contains a VP graph.

In the following we examine the cases under which a vertex is not T-characterized. We take advantage of the following well-known result [1].

[page 367]

Lemma 1. A complete graph Γ_n (where n is even) can be expanded into $n-1$ one-degree factors.

Theorem 4. Let $\Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}_k$ and $p \in \Gamma_{n,k} = (P, E)$. If p is not T-characterized, then there exist at least $k-1$ cycles of length 3 which contain p .

PROOF. If p is not T-characterized, then the complement of the subgraph of $\Gamma_{n,k}$ generated by it ($G = (A, B)$) does not contain 1-factor. By Lemma 1, \bar{G} contains $n-1$ edge-independent 1-factors, and in G from these factors an edge must exist such that in \bar{G} they are not a 1-factor. So the number of edges in G is at least $k-1$. As it is the case in G that every edge endpoint is a neighbor of p , a 3-cycle containing p is thus constructed. And hence the theorem is proved.

For $k = 4$, the following illustrations in figure 4/a-h depict cases where the vertex p is not T-characterized (bold edges indicate \bar{G}).

Lemma 2. Let Γ_n be an n -vertex complete graph (n an even number) and we denote the number of all 1-factors of Γ_n as F . Then

$$(14) \quad F_n = \frac{\binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \dots \binom{2}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

PROOF. It is easy to see that the assertion is true for the case $n = 2$. Suppose it also holds for any

$k \leq n - 2$, that is:

$$(15) \quad F_k = \frac{\binom{k}{2} \binom{k-2}{2} \dots \binom{2}{2}}{\binom{k}{2}!}$$

[page 368]

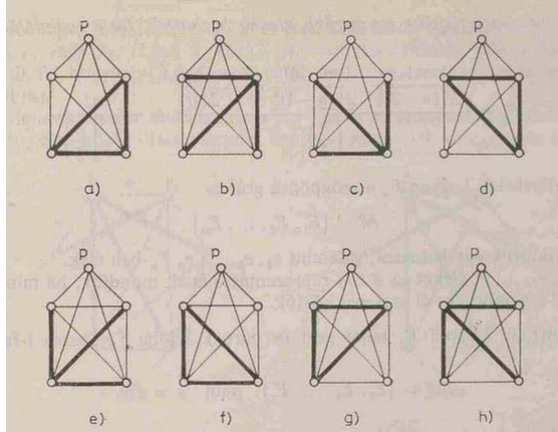


Figure 4

Then Γ_k has two vertices beyond which $k+1$ new vertex pairs can be selected (we don't take note of the ordering of the two points), each of which has an F_k numbered 1-factor which each share exactly one edge, so

$$(16) \quad F_{k+2} = (k+1) \cdot F_k$$

Recalling that

$$(17) \quad \frac{\binom{k+2}{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} = \frac{2 \cdot (k+2)!}{2! k! (k+2)} = k+1$$

So thus

$$(18) \quad F_{k+2} = \frac{\binom{k+2}{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} * \frac{\binom{k}{2} \binom{k-2}{2} \dots \binom{2}{2}}{\frac{k}{2}!} = \frac{\binom{k+2}{2} \binom{k}{2} \dots \binom{2}{2}}{\frac{k+2}{2}!}$$

This concludes the proof of the theorem.

Corollary.

4. In the context of (16) we can write F_n recursively as follows:

$$(19) \quad F_n = (n-1) \cdot F_{n-2}$$

2. The proof of Lemma 2 shows that if e is an edge contained in an E 1-factor of Γ_n , then exactly F_{n-2} such

1-factors are in Γ_n which with E contain exactly the e_i shared edges.

3.If the number of distinct 1-factors in Γ_n is denoted FD_n , then based on Lemma 1 and (19) we have:

$$FD_n = F_n \Leftrightarrow n-1 = (n-1) \cdot F_{n-2} \Rightarrow 1=F_{n-2} \Rightarrow n=4$$

[page 369]

4. The correspondence to (14) can be simplified by hiding the numerator as follows:

$$F_n = \frac{n!}{\frac{2!(n-2)!}{\frac{n!}{2}} \cdot \frac{(n-2)!}{2!} \cdots \frac{2!}{2!}} = \frac{n!}{2^{n/2} \frac{n!}{2}}$$

Definition 7. Let Γ_n be a graph with n vertices and let

$$(20) \quad E = \{ E_1, E_2, \dots, E_m \}$$

be a set of 1-factors of Γ_n and e_1, e_2, \dots, e_p be edges of Γ_n .

We say the edges e_1, e_2, \dots, e_p are a representation of E if every 1-factor of E shares at least one edge with $\{ e_1, e_2, \dots, e_p \}$.

Lemma 3. Let Γ_n be a complete graph (n even). Denote the set of all 1-factors of Γ_n as

$$(21) \quad \mathbf{E} = \{ E_1, E_2, \dots, E_r \} \text{ where } r = F_n \quad \text{and}$$

$$(22) \quad R = \{ e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \}$$

a set of edges of Γ_n . Then R is a representation of \mathbf{E} if and only if for any two $e_i \neq e_j$, there does not exist $E_k \in \mathbf{E}$ for which $e_i \in E_k$ and $e_j \in E_k$.

PROOF. Necessity: Suppose that R is a representation of \mathbf{E} and there exist $e_i \neq e_j$ and E_k where $e_i \in E_k$ and $e_j \in E_k$. On the basis of Lemma 2, Corollary 2, e_i represents an F_{n-2} 1-factor of \mathbf{E} , and e_j does also. As both edges are in E_k , it is the case that the for the 1-factor K_{ij} represented by the two edges, it holds that

$$(23) \quad K_{ij} < 2 \cdot F_{n-2}$$

If we suppose that the remaining $n-3$ edges in R represent the maximum $n-1$ 1-factors, then it is the case that for the $K_{\mathbf{E}}$, the elements of \mathbf{E} represented by R , it holds that

$$(24) \quad K_{\mathbf{E}} < (n-1) \cdot F_{n-2}$$

which is a contradiction, as the number of elements in \mathbf{E} is $(n-1) \cdot F_{n-2}$ and R is a representation of \mathbf{E} , so for $K_{\mathbf{E}}$ the equality must hold.

Sufficiency: As every $E_k \in \mathbf{E}$ 1-factor contains only one edge $e_i \in R$, and on the basis of Lemma 2, Corollary 2, an edge e_i represents an F_{n-2} 1-factor of \mathbf{E} , since there are $n-1$ of R numbering $(n-1) \cdot F_{n-2}$, this is all of the edges of \mathbf{E} .

We have proved the theorem.

Theorem 5. For a complete graph Γ_n ($n > 4$, even), all 1-factors can be represented by exactly $n-1$ edges if and only if those edges are joined by a vertex.

PROOF. Necessity: Let $p \in \Gamma_n$ be such a vertex. As every 1-factor of Γ_n is contained by an edge attached to p , it follows that all such edges are indeed an $n-1$ element representation of all 1-factors of Γ_n .

Sufficiency: Let us examine an arbitrary edge $(p_1 p_2) \in \Gamma_n$ (p_1 and p_2 are the endpoints of edge e_i). Let this be the first element of the $n-1$ element representation. By Lemma 3, the second element can only be selected from amongst such e_j for which the only 1-factor containing e_i does not also appear.

[page 370]

It is easy to see that such an edge can only be selected from those which have p_1 or p_2 as an endpoint. (See figure 5.) (The dark thick lines are edges that may be chosen.)

Suppose that we choose $(p_1 p_3) = e_j$ as the second element of the representation (see figure 6.)

Continuing according to Lemma 3, we may choose from amongst p_1 and p_2 for attaching (that which can still be chosen), and immediately for the e_i edge we can also take advantage of Lemma 3,

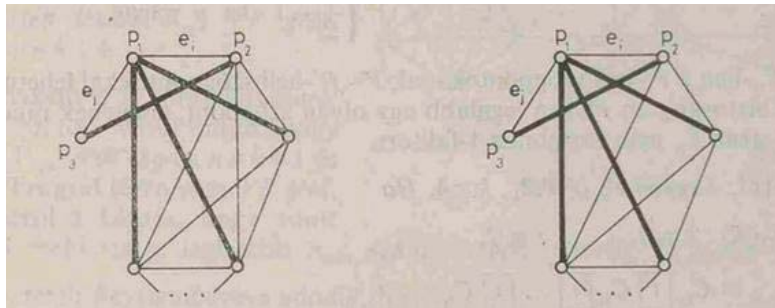


Figure 5

Figure 6

thus the desired representation for p_3 must attach. Such an edge could only be $(p_2 p_3)$. With this, the edges which can be chosen have been consumed. Thus this selection constitutes a representation if and only if $n=4$; for all other cases the $n-1$ edges which can be selected as the elements of the representation are attached to p_1 (thus necessitating the condition that $n>4$). We have thus proved the theorem. For $n=4$ the entire representation is depicted in figure 4.

In the remainder of the paper we introduce a type of graph which under a certain set of assumptions proves to be a VP graph. We will examine, for a given even number k , what the smallest number n is such that $\Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}_k$ is a VP graph.

Denote by \mathbf{C} the set of all complete graphs where the elements are C_1, C_2, \dots, C_n . (C_n is the complete graph of n vertices.)

Definition 8. Let $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{it}$ be (not necessarily distinct) graphs in \mathbf{C} where $C_{ij} = (P_j, E_j)$ and $j=1, 2, \dots, t$. The t -composition of graphs $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{it}$ (indicated by “ t ”) is a graph $\Gamma = (P, E)$ where the following are true:

- (a) Γ is a regular graph
- (b) $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_t$, $\forall i \neq j: P_i \cap P_j = \emptyset$
- (c) $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_t \cup E'$, $\forall i \neq j: E_i \cap E_j = \emptyset$ where E' is the set of so-called connector edges.

COMMENTS.

1. The set E' of edges is not easily determined.
2. E' determines the connectedness of the graph Γ . That is, if $E' = \emptyset$, then Γ is a t -component regular graph from complete subgraphs and $i_1 = i_2 = \dots = i_t$.
3. If $\Gamma = \Gamma_{n,k}$ and $\max(i_1, i_2, \dots, i_t) = L$, then $L \leq k+1$.

Theorem 6. Let $\Gamma_n = (P, E)$ be a connected graph on n vertices. If in $\bar{\Gamma}_n$ there exists a complete subgraph on $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ vertices, then in Γ_n there is no 1-factor. (We will use $\bar{\Gamma}_n$ to indicate the graph complement of Γ_n .)

[page 371]

PROOF. Let $G = (P', E')$ be an $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ vertex complete subgraph. Then

$$|P'| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \Rightarrow |P \setminus P'| = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \text{if } n \text{ odd or} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 & \text{if } n \text{ even.} \end{cases}$$

In $\bar{\Gamma}_n$ the vertices of P' can only be connected to vertices of $P \setminus P'$, so certainly in P' there is at least one vertex which has no pair in $P \setminus P'$, that is, Γ_n does not contain a 1-factor.

Theorem 7. Let $\Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}$ and $k \geq 4$. Further suppose the following:

1. $C_{ij} \in \mathbf{C}$, $j=1,2,\dots,t \geq 2$.
2. $\Gamma_{n,k}$ is the t -composition of $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{it}$
3. $\frac{k+4}{2} \leq i_j \leq k$ $j=1,2,\dots,t \geq 2$

Then $\Gamma_{n,k}$ is a VP graph.

PROOF. We shall examine an arbitrary vertex p in $\Gamma_{n,k}$. Then from property b) of the t -composition, it follows that there exists C_{ij} in Γ where $p \in C_{ij}$ and i_j fulfills the conditions of Theorem 3. If we now examine the subgraph of $\Gamma_{n,k}$ generated by p , there are k vertices and it contains C_{ij} , which fulfills the conditions for Theorem 6 because $\frac{k+4}{2} \leq i \leq k$. That is, the complement of the subgraph generated by p does not contain a 1-factor. This means that p is not T -characterized. As we did not connect an edge to p , it can be done to any vertex in $\Gamma_{n,k}$, so $\Gamma_{n,k}$ is a VP graph.

A graph meeting conditions 1, 2, and 3 is shown in Figure 7.

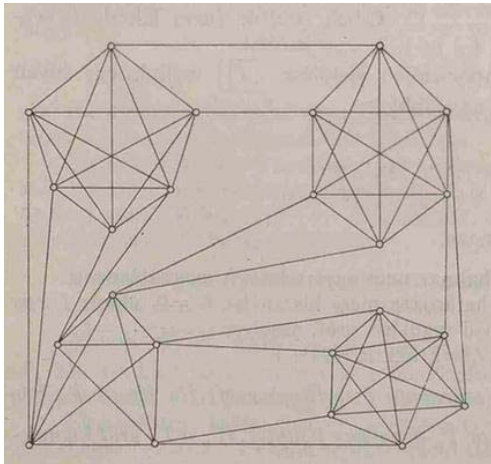


Figure 7

COMMENTS.

1. From the proof of Theorem 7 it easily follows that to the extent that in $\Gamma_{n,k}$ there are subgraphs $C_{ij} \in \mathbf{C}$, where $i_j = \frac{k}{2} + 1$, then Γ is not a VP graph. Such a graph is shown in figure 8.
2. Theorem 7 also addresses the statement of Theorem 3, thus we now know that the VP graphs constructed in Theorem 3 are not the only to exist for any even number k .
3. If we examine for the minimum case the first and third suppositions for Theorem 7, then we have $t=2$ and $i_1 = i_2 = \frac{k+4}{2}$, and we get that the number of vertices is $n = k + 4$ for the t -composition of C_{i_1} and $C_{i_2} = \Gamma_{n,k}$ VP graph.

[page 372]

From this follows the following theorem:

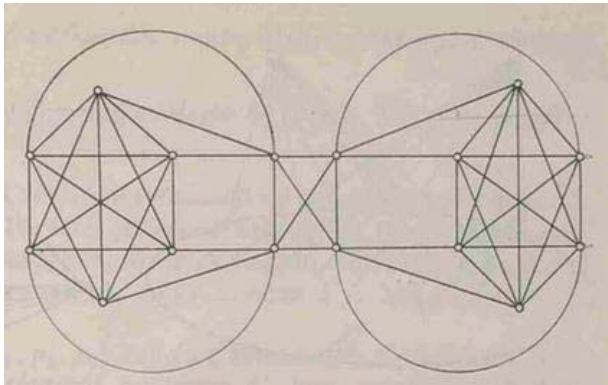


Figure 8

Theorem 8. For any even number $k \geq 4$ there exists a $\Gamma_{n,k}$ VP graph where $n = k + 4$.

As an example, in figure 9 we can see a $\Gamma_{8,4}$ graph. As we know, for any $\Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}$ where $n \geq k + 1$ and $\Gamma_{k+1,k}$ is complete there is no VP graph, so the question arises, for the given k cases, what is the smallest n_{\min} number for which there exists $\Gamma_{n,k} \in \mathbf{PR}$ a VP graph.

Taking into account Theorem 8, it follows that

$$(25) \quad k+2 \leq m_{\min} \leq k + 4$$

9.Theorem. If $\Gamma \in \mathbf{PR}$ and $n = k+2$, then Γ is not a VP graph.

PROOF. The proof can be completed using total induction on the degree. In figure 10 the case of $k=2$ is depicted, for which explanation can be seen clearly.

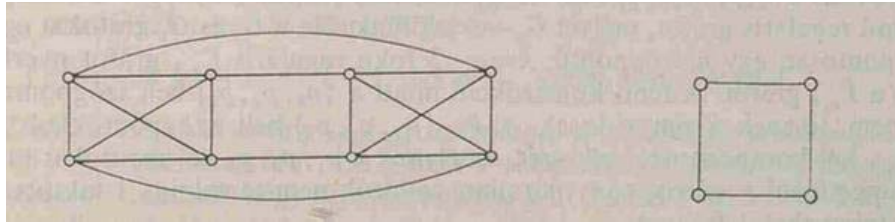


Figure 9

Figure 10

Suppose that the statement is true for Γ . We examine a $\Gamma \in \mathbf{PR}$ graph where $n = k + 2$ and select from these an arbitrary vertex p . Then it is easy to see that $\Gamma_{n,k}$ contains exactly one other vertex q which has the same neighbors as p , that is, the subgraphs generated by p and q are the same (see figure 11). Denote as G_p the subgraph of $\Gamma_{n,k}$ generated by p (also by q). G_p has exactly k vertices, is a degree $k - 2$ regular graph, which on the basis of the inductive assumption meets the conditions of the assertion, that G_p is a VP graph.

Based on this we can select any vertex of G_p , (let us call it z), and in the complement of the subgraph of G (G') generated by it there is a 1-factor. Denote as G the subgraph of Γ generated by z . Then G_z exactly contains the points p and q outside the points in G'_p , so \bar{G}_z contains the pq edge, so this establishes that there is a 1-factor of \bar{G}'_p and (pq) is precisely a 1-factor of \bar{G}_z , so the vertex z is T-characterized and $\Gamma_{n,k}$ is not a VP graph.

With this we have proved the theorem.

As an example in figure 12 we can see a $\Gamma_{8,6}$ graph, which using the symbols from Theorem 9, we indicate (in bold) the G_z 1-factor for the vertex z .

[page 373]

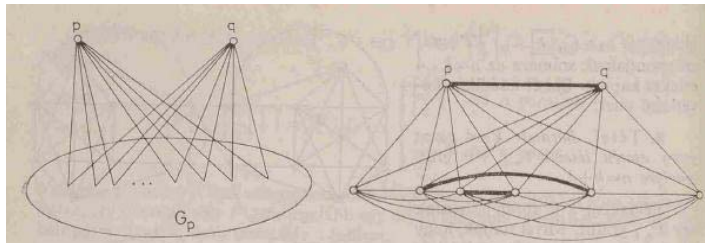


Figure 11

Figure 12

10.Theorem. For any case $k \geq 2$, there exist $\Gamma_{n,k}$ k -regular graphs for which $n = k + 3$ and $\Gamma_{n,k}$ does not contain a 1-factor.

PROOF. If $k \geq 3$, then we can examine the vertex set P on n vertices and select from these three vertices we label p_1, p_2 , and p_3 . Now if we connect p_1, p_2 , and p_3 in order to the remaining vertices of $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ as in figure 13, then the degree of these three vertices will be exactly $k = n - 3$, while the degree of every other vertex in $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ is exactly 3. We denote the graph arising from this G_1 .

Now from the vertices in $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ we create an arbitrary regular graph of degree $k-3$ which we denote as G_2 . If the graphs G_1 and G_2 intersect, we get a $k = n - 3$ degree regular $\Gamma_{n,k}$ graph. We create a $\bar{\Gamma}_{n,k}$ graph. Due to the above construction, the points in $\{p_1, p_2, p_3\}$ in the general case will not be neighbors to the vertices in $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ of $\bar{\Gamma}_{n,k}$. That is, $\bar{\Gamma}_{n,k}$ splits into two components, for which the portion containing the vertices p_1, p_2 , and p_3 does not contain a 1-factor, independent of whether k is even or odd. Thus $\bar{\Gamma}_{n,k}$ does not contain a 1-factor.

If $k = 2$, then $n = 5$, in which case due to being an odd number $\Gamma_{n,k}$ does not contain a 1-factor. With this the theorem is proved.

It is easy to see that if $k = 1$ and $n = 4$ the theorem does not hold. The well-known Kuratowski graph is achieved in the theorem construction for the case $k = 3$, see figure 14.

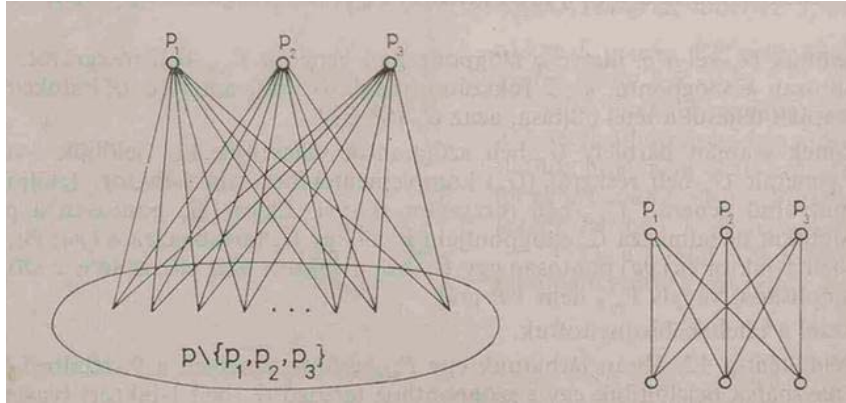


Figure 13

Figure 14

[page 374]

The following theorem gives a method for further specifying the inequality in (25), allowing a specific determination of the value of n_{\min} .

Theorem 11. For any even $k \geq 6$, there exists a $\Gamma \in \mathbf{PR}$ VP graph where $n = k + 3$.

PROOF. Let $\Gamma_{n,k}$ be a graph arising from the construction in the proof of Theorem 10 (see the figure in 13) with the restriction (using the symbols from Theorem 10) that the G_2 subgraph should not contain a 1-factor. By Theorem 10 we assume that one such G_2 always exists. We show that every vertex of $\Gamma_{n,k}$ is T-characterized.

Further suppose p is an arbitrary element in $\{p_1, p_2, p_3\}$ and q an arbitrary vertex of G_2 .

1. The subgraph generated by vertex p is exactly G_2 , and in addition we assumed that in \bar{G}_2 there is no 1-factor, so p is not T-characterized.
2. If we denote as G_q the subgraph generated by vertex q , then the set K of vertices of G_q are $\{p_1, p_2, p_3\}$ together with the neighbors of q in G_q . As each member of $\{p_1, p_2, p_3\}$ is a neighbor of every vertex in K , \bar{G}_p can be divided into two components, the vertex sets $\{p_1, p_2, p_3\}$ and K . The vertices $\{p_1, p_2, p_3\}$ together with the vertices in G comprise an odd number of vertices, thus it cannot contain a 1-factor, and thus neither does \bar{G}_p . Hence q is clearly not T-characterized, which proves the theorem.

Using Theorems 9 and 11, we still only know an estimated value of n_{\min} in the inequality in (25) in the case where $k \geq 6$. The question is what the situation is when $k = 2$ and $k = 4$?

In the $k = 2$ case, $\Gamma_{n,2} \in \mathbf{PR}_2$ is exactly a Hamiltonian cycle, thus it is simple to see that for no value of n is $\Gamma_{n,2}$ a VP graph.

Theorem 12. If $k = 4$ and $n = k + 3$, then $\Gamma \in \mathbf{PR}$ is not a VP graph.

PROOF. We select $\Gamma_{7,4}$ arbitrary p vertices and examine the subgraph of $\Gamma_{7,4}$ generated by p , G_p . If p is not T-characterized, then G_p contains the representation of the 1-factors of the 4-vertex complete graph constructed from the neighbors of p . As can be determined from figure 4, this is only possible in two cases: in either the a), d), f), g) case or the b), c), e), h) case.

Using q_1 and q_2 we denote the points of $\Gamma_{7,4}$ which are not in G_p and not identical to p (see figure 15). In the first case G_p contains the first type of 1-factor representation (see the bold line in figure 16).

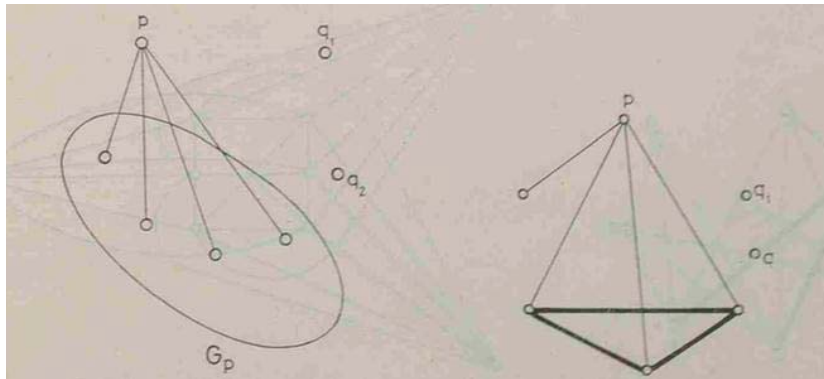


Figure 15

Figure 16

[page 375]

Because $k = 4$, vertex q_1 (or q_2) is a neighbor with at least two vertices from the representation, so for q_2 (or q_1) at most three vertices remain as neighbors. That is, in this case, $\Gamma_{7,4}$ cannot be constructed (see figure 17).

In the second case G_p contains the second type of 1-factor representation (shown in bold lines in figure 18).

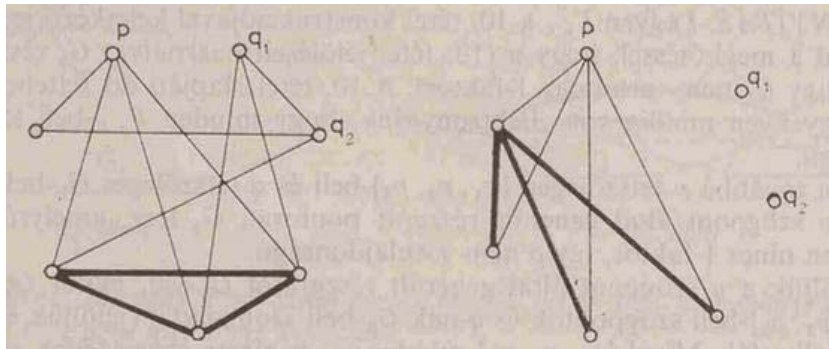


Figure 17

Figure 18

However then only one type of connecting of q_1 and q_2 remains (from the other vertices) for the $\Gamma_{7,4}$ construction (see figure 19), in which it is easy to find the T-characterized vertex (these are indicated by “T” in figure 19). We remark that using the graph construction from Theorem 10 with much more general assumptions can also give rise to a graph with the desired properties. However, our goal was only to demonstrate existence, for which this proves sufficient.

Theorems 8, 10 and 11 enable to more exactly specify the inequality in (25) and we can give the following theorem:

13. Theorem. For any even number $k \geq 4$, the smallest n for which $\Gamma \in \mathbf{PR}$ is a VP graph is

$$(26) \quad \begin{aligned} n_{\min} &= k + 3 \text{ if } k \geq 6 \\ n_{\min} &= k + 4 \text{ if } k = 4 \end{aligned}$$

The $k=4$ case for Theorem 13 is depicted in figure 19 and figure 20 shows an example of the $k=6$ case.

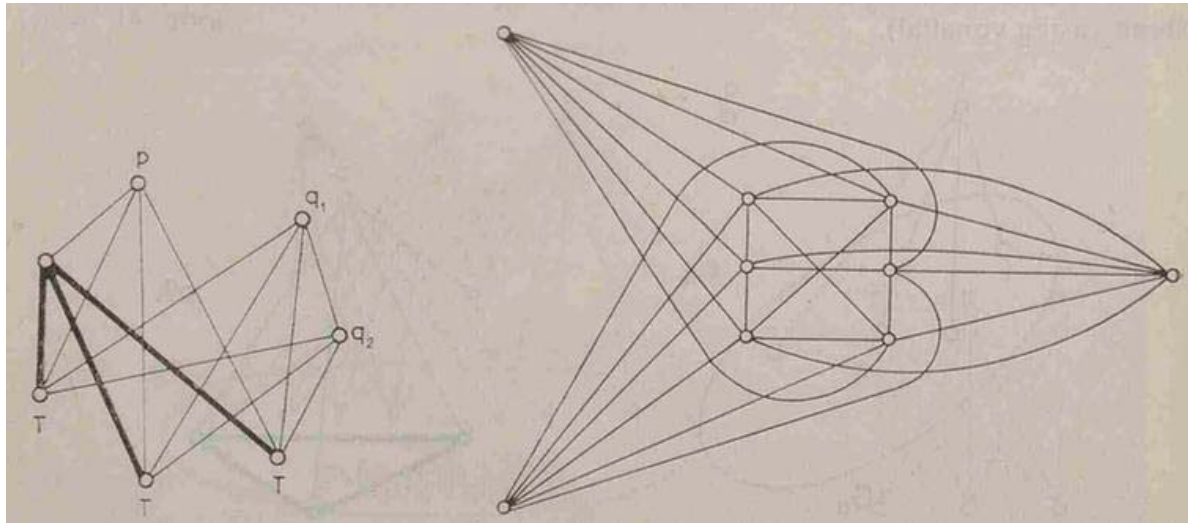


Figure 19

Figure 20

[page 376]

LITERATURE.

- [1] C. Berge: Graphs and hypergraphs. North-Holland, 1973.
- [2] G. A. Dirac: Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. Soc. (3), 2 (1952), 69-81.
- [3] P. Erdős and A. Rényi: On the evolution of random graphs. Hungarian Academy of Sciences Mathematics Institute Proceedings, year V, series A, volumes 1-2, 1960.

[Title and author information appears in Russian.]

[Title and author information appears in English.]

[page 377]